

UNIVERSAL  
LIBRARY

**OU\_224782**

UNIVERSAL  
LIBRARY





بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# علم ہیئت کروی حصہ اول

تصنیف

سررابرٹ بال ایم۔ اے، ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن سررشتہ تالیف و ترجمہ سرکار عالی

۱۳۵۸ھ تا ۱۳۲۸ھ تا ۱۹۳۹ء

طبع معارف کلاں علیہ السلام  
دارالافتاء اسلامیہ



یہ کتاب کیمبرج یونیورسٹی پریس کے ایجنٹس مسز میکیلن اینڈ کمپنی  
کی اجازت سے جن کو حق اشاعت حاصل ہے  
اردو میں ترجمہ کر کے طبع و شائع کی گئی ہے۔

# فہرست مضامین

علم ہیئت کرؤی

حصہ اول

پہلا باب

اساسی ضابطے

صفحہ	دفعہ
۱	۱ — علم مثلث کرؤی
۱۲	۲ — ڈلمبر اور نیپیر کی تمثیلات
۱۶	۳ — صحت جو نو کارائی عمل حساب میں حاصل ہو سکتی ہے
۱۹	۴ — کرؤی مثلث میں تفرقی ضابطے
۲۱	۵ — بینی اور راج کا فن
۳۴	پہلے باب پر مثالیں

دوسرا باب  
کرؤی محدودوں کا استعمال

صفحہ

دفعہ

- ۶ — کرہ بدرجہ دار بڑے دائرے ..... ۳۸
- ۷ — کرہ پر کے کسی نقطہ کے مجدد ..... ۴۰
- ۸ — دو نقطوں کو ملانے والی قوس کی جیب التمام کو ان نقطوں کے ..... ۴۲
- ۹ — کرہ میں مجددوں میں دی ہوئی مساوات کا مفہوم ..... ۴۶
- ۱۰ — دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان ان کے شطیبوں کو ملانے والی ..... ۴۹
- ۱۱ — دو درجہ دار بڑے دائروں کا تقاطع ..... ۵۱
- ۱۲ — مجددوں کا استعمال ..... ۵۵
- ۱۳ — لوکارتموں کا استعمال ..... ۶۳

## تیسرا باب زمین کی شکل اور نقشہ کشی

- ۱۴ — تہید یہ ..... ۶۵
- ۱۵ — عرض بلد ..... ۶۶
- ۱۶ — نصف النہار پر نصف قطر انحاء ..... ۷۱
- ۱۷ — نقشہ کشی کا نظریہ ..... ۷۵
- ۱۸ — نقشہ کے ہم شکل ہونے کی شرطیں ..... ۷۷
- ۱۹ — ہم شکل تعبیر میں پیمانہ ..... ۸۱
- ۲۰ — مرکبہ کا نطل ..... ۸۱
- ۲۱ — مساوی المیلان ..... ۸۶
- ۲۲ — تسلیمی اظلال ..... ۸۹
- ۲۳ — کرہ پر کے کسی دائرہ کا تسلیمی نطل بھی ایک دائرہ ہوتا ہے ..... ۹۳

صفحہ	۲۴	تسطیحی خیل کے لیے عام ضابطے	۹۶
۲۵	ایسا نقشہ جس میں کرہ پیکار رقبہ، نقشہ پر مساوی رقبہ کے		
	ذریعہ تعبیر ہو	۹۹	
	تیسرے باب پر متفرق مثالیں	۱۰۱	

## چوتھا باب کرہ سماوی

۲۶	کرہ سماوی	۱۰۶
۲۷	افق سماوی	۱۱۰
۲۸	یومی حرکت	۱۱۱
۲۹	نصف النہار اور اول السمیت	۱۱۵
۳۰	ارتفاع اور السمیت	۱۱۹
	چوتھے باب پر مختلف مثالیں	۱۲۳

## پانچواں باب صعود مستقیم اور میل۔ سماوی عرض بلد اور طول بلد

۳۱	صعود مستقیم اور میل	۱۲۵
۳۲	نقطہ راس الحمل	۱۲۵
۳۳	ساعتی زاویہ اور کوکبی یوم	۱۳۰
۳۴	ساعتی زاویہ اور میل سے راسی فاصلہ اور السمیت کی تعیین	۱۳۶
۳۵	تفرقی ضابطوں کے اطلاقات	۱۴۰

صفحہ	
۱۴۸	۳۶ — کسی جرم فلکی کے تکبید کا وقت
۱۵۷	۳۷ — کسی جرم فلکی کا طلوع وغروب
۱۶۲	۳۸ — سماوی عرض بلد اور طول بلد
۱۶۶	پانچویں باب پر مختلف مثالیں

## چھٹا باب کرہ ہوائی کا انعطاف

۱۷۷	۳۹ — مناظری انعطاف کے قوانین
۱۸۱	۴۰ — ہیئت انعطاف
۱۸۳	۴۱ — ہوائی انعطاف کا عام نظریہ
۱۸۶	۴۲ — انعطاف کی محصلہ تقرقی مساوات کا تکمیل
۱۹۰	۴۳ — کرہ ہوائی کے انعطاف کے لیے کیسینی کا ضابطہ
۱۹۴	۴۴ — کرہ ہوائی کے انعطاف کے لیے دیگر ضابطے
۱۹۸	۴۵ — کرہ ہوائی کے دباؤ اور تپش کا اثر انعطاف پر
۱۹۹	۴۶ — مشاہدہ سے کرہ ہوائی کے انعطاف کی نقییں
۲۰۳	۴۷ — انعطاف کا اثر ساعتی زاوے اور میل پر
۲۰۵	۴۸ — انعطاف کا اثر دو قریبی سماوی نقطوں کے درمیان ظاہری فاصلہ پر
۲۱۰	۴۹ — انعطاف کا اثر ایک دو ہرے تارے کے زاویہ محل کی پیمائش پر

## ساتواں باب

صفحہ

صفحہ

## کیپلر اور نیوٹن کے کلمے اور انکا استعمال

- ۵۰۔ وہ کلمے جن کی بموجب سیارے سورج کے گرد حرکت کرتے ہیں  
 ۲۲۲ اور جو ان کے بموجب کیپلر کے نام سے موسوم ہیں  
 ۵۱۔ سورج کی ظاہری حرکت  
 ۲۳۴  
 ۵۲۔ ناقصی حرکت محسوب کرنا  
 ۴۳۵  
 ۵۳۔ ناقصی حرکت کے وہ ضابطے جو ترتیبوں کے ذریعہ بیان  
 کئے گئے ہیں  
 ۲۵۱

## آٹھواں باب

### استقبال اور کبو

- ۵۴۔ قمر شمسی استقبال کا مشاہدہ  
 ۲۶۳  
 ۵۵۔ قمر شمسی استقبال اور کبو کی طبعی توضیح  
 ۲۶۶  
 ۵۶۔ سیارہ کی استقبال  
 ۲۷۰  
 ۵۷۔ صعود ستقیم اور میل کی رقوم میں استقبال اور کبو کے لیے مام  
 ضابطے  
 ۲۷۳  
 ۵۸۔ راس النحل کی حرکت طریق الشمس پر  
 ۲۸۵  
 ۵۹۔ غیر تابعیومی اعداد  
 ۲۸۹  
 ۶۰۔ ستاروں کی ذاتی حرکتیں  
 ۳۰۰  
 ۶۱۔ ارضی عرض بلدوں میں تغیرات  
 ۳۰۲  
 آٹھویں باب پر مثالیں  
 ۳۰۴

صفحہ

رقعہ

## نواں باب

### کوکبی وقت اور اوسط وقت

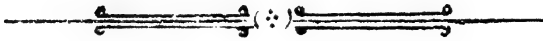
۳۰۹	.....	کوکبی وقت	۶۲
۳۱۱	.....	بینی گہری کی تصحیح	۶۳
۳۱۵	.....	طریق اشمس کا میلان	۶۴
۳۲۰	.....	مصور مستقیم کی تعیین میں جتنی صحت ممکن ہے اس کی تخمین	۶۵
۳۲۳	.....	کوکبی سال اور شمسی سال	۶۶
۳۲۶	.....	اوسط حرکت کا ہندسی اصول	۶۷
۳۳۱	.....	اوسط وقت	۶۸
۳۳۵	.....	اوسط ظہر کوکبی وقت	۶۹
۳۳۸	.....	کوکبی وقت سے اوسط وقت معلوم کرنا	۷۰
۳۴۲	.....	ارضی تاریخ خط	۷۱
۳۴۵	.....	نویں باب پر مثالیں	

## دسواں باب

### سورج کی ظاہری سالانہ حرکت

۳۴۸	.....	استوا کی تحویل	۷۲
۳۵۴	.....	مرکز کی مساوات	۷۳
۳۵۸	.....	وقت کی مساوات	۷۴

صفحہ	صفحہ
۳۶۱	۷۵ — وقت کی مساوات سے متعلق ضابطے
۳۶۴	۷۶ — وقت کی مساوات کی تریبی تعبیر
۳۷۱	۷۷ — وقت کی مقیم مساوات کی عام تحقیق
۳۷۸	۷۸ — موسموں کا سبب
۳۷۹	دسویں باب پر مثالیں







# علم ہیئت کرؤی

حصہ اول

## پہلا باب

اساسی ضابطے

(۱)

صفحہ

۱

۱۲

۱۶

۱۹

۲۱

دفعہ

۱ - علم مثلث کرؤی -

۲ - ڈبلر اور نیپیر کی مثلثات -

۳ - صحت جو نو کارتی عمل حساب میں حاصل ہو سکتی ہے -

۴ - کرؤی مثلث میں تفرقی ضابطے -

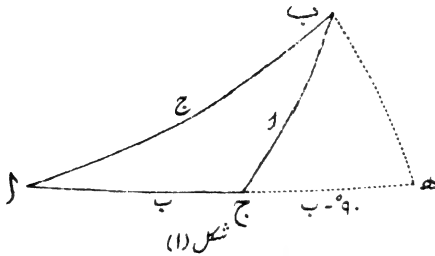
۵ - بینی اور راج کا فن -

۱ - علم مثلث کرؤی -

فرض کرو کہ ایک مثلث کرؤی کے ضلع اور زاوے حسب معمول  
'ا'، 'ب'، 'ج'، 'ا'، 'ب'، 'ج' ہیں علم مثلث کرؤی کی کتابوں میں یہ ثابت  
کیا گیا ہے کہ

جم ج = جم ا + جم ب + جب ا + جب ب جم ج ..... (۱)

جب ج جم  $\angle$  = جم  $\angle$  جب ب - جب  $\angle$  جم ب جم ج ..... (۲)  
 جب ج جب  $\angle$  = جب  $\angle$  جب ج ..... (۳)  
 ضابطہ (۲) کو (۱) سے آسانی کے ساتھ حسب ذیل طریقہ پر حاصل  
 کیا جاسکتا ہے -  
 (ج کو (شکل ۱) تک اتنا خارج کرو کہ  
 ج  $\angle$  = ۹۰° - ب



تب مثلث ب ا ه سے بموجب ضابطہ (۱)

جم ب ا ه = جب ج جم ا

اور مثلث ب ج ه سے

(۲)

جم ب ا ه = جم  $\angle$  جب ب - جب  $\angle$  جم ب جم ج

جم ب ا ه کی یہ دو قیمتیں مساوی رکھنے سے ضابطہ (۲) حاصل ہوتا ہے -  
 اسی طرح نمونہ (۲) کے مختلف ضابطے، حافظہ پر زیادہ بار ڈالے  
 بغیر، حسب ضرورت لکھ دیے جاسکتے ہیں -

مساواتیں (۱)، (۲)، (۳) سادہ ترین مساواتیں ہیں جو اس وقت  
 استعمال کی جاسکتی ہیں جبکہ کروی مثلث کے دو ضلع  $\angle$  اور ب اور دیمانی  
 زاویہ ج دے گئے ہوں اور اس کے اجزاء  $\angle$  اور ج معلوم کرنا مطلوب  
 ہو - بادی النظر میں یہ عجیب معلوم ہوتا ہے کہ صرف دو مقداروں کو دریافت  
 کرنے کے لیے تین مساواتوں کی ضرورت پڑتی ہے - لیکن ٹھیک حل

حاصل نہیں ہو سکتا اگر ۱ اور ج کو معلوم کرنے کے لیے مساواتیں تین سے کم ہوں۔

مثلاً فرض کرو کہ صرف مساواتوں (۱) اور (۲) کا زوج دیا گیا ہے اور ۱ اور ج کی قیمتیں معلوم کر لی گئی ہیں جو ان مساواتوں کو پورا کرتی ہیں۔ یہ ظاہر ہے کہ یہی مساواتیں قیمتوں کے تین اور جنٹوں  $۱۸۰ + ۱ - ۳۶۰ - ج$ ،  $۳۶۰ - ۱ - ج$ ،  $۱۸۰ - ۱ - ج$  سے بھی پوری ہوتی ہیں۔ لیکن اگر یہ بھی مقصود ہو کہ جو قیمتیں اختیار کی جائیں وہ مساوات (۳) کو بھی پورا کریں تو قیمتوں کے آخری دو جنٹوں کو خارج کر دینا پڑتا ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ جب مساواتیں (۱)، (۲) اور (۳) سب کی سب ۱ اور ج سے پوری ہوتی ہوں تو ایک دو سرحل صرف  $۱۸۰ + ۱ - ۳۶۰ - ج$  رہ جاتا ہے۔

اس باقی ماندہ ابہام کے متعلق یہ یاد رکھنا چاہئے کہ کرہ پر کے دو نقطوں ۱ اور ب کو ملانے والی بڑے دائرہ کی قوس کا طول بالعموم مبہم ہوتا ہے۔ یہ طول ۱ ب ہو سکتا ہے یا  $۳۶۰ - ۱ ب$ ۔ اسی طرح اگر دو بڑے دائروں کے درمیانی زاوے کی تعریف اس قوس سے کی جائے جو دو خاص قطبوں کے درمیان ہو تو بھی یہاں یہ ابہام پیدا ہوگا کہ قطبوں کو ملانے والی دو قوسوں میں سے کونسی قوس زاویہ کا ناپ ہے۔ ہر مخصوص سوال کے حالات سے بالعموم یہ امر واضح ہوگا کہ ان دو طولوں ۱ ج یا  $۱۸۰ + ۱ - ۳۶۰ - ج$  میں سے کونسا حل مطلوب ہے۔

اگر ایک ضلع اور دو متصلہ زاوے دئے جائیں تو دو نئے ضابطے (۴) اور (۵) ضابطہ (۳) کے ساتھ لینے ہوں گے

(۴) جم ج = جم ا + جم ب + جب ا + جب ب + جم ج

(۵) جب ج + جم ا = جم ا + جب ب + جب ا + جم ج

جب ج + جب ا = جب ا + جب ج

ضابطے (۴) اور (۵) علی الترتیب (۱) اور (۲) سے قطبی مثلث کا



ان ضابطوں میں سے کسی ایک میں شریک ہونے والے زاویوں اور ضلعوں میں سے ایک زاویہ دو ضلعوں کے درمیان واقع ہوتا ہے اس کو "داخلہ زاویہ" کہا جاسکتا ہے۔ اسی طرح ایک ضلع دو زاویوں کے درمیان واقع ہوتا ہے اس کو "داخلہ ضلع" کہا جاسکتا ہے۔ تب ضابطہ کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے :-

(داخلہ ضلع کی جیب التمام) (داخلہ زاویہ کی جیب التمام)  
= (داخلہ ضلع کی جیب) (دوسرے ضلع کا تمام التمام)

۔ (داخلہ زاویہ کی جیب) (دوسرے زاویہ کا تمام التمام)

مثلاً چار اجزاء  $a, b, c, d$  پر مشتمل ضابطہ لکھ لینے کے لیے  
ج داخلہ زاویہ ہے اور  $d$  داخلہ ضلع، پس ضابطہ (۶) حاصل ہوتا ہے

$\text{ج} \times \text{ج} = \text{ج} \times \text{ج}$  جب  $d$  مم ب۔ جب  $c$  مم ب

اگر دو ضلع  $d$  و  $c$  اور  $d$  کے مقابل کا زاویہ  $a$  دئے جائیں تو

(۳) سے جب  $c$  حاصل ہوتا ہے۔ اگر جب  $c < a$  تو یہ مسئلہ ناممکن

ہے۔ اگر جب  $c > a$  تو یہ ظاہر نہیں ہوتا کہ  $c$  کو اس کی دو کمیلی قیمتوں

میں سے کونسی قیمت دینی چاہئے اور جب تک کہ کوئی مزید بات معلوم

نہ ہو جس سے یہ ظاہر ہو سکے کہ  $c$  حادہ ہے یا منفرجہ یہ مسئلہ مبہم رہتا

ہے۔

اگر دو زاوے اور ان میں سے ایک کے مقابل کا ضلع دئے

جائیں تو ضابطہ (۳) سے دوسرے زاوے کے مقابل کا ضلع معلوم ہوگا

جو حسب سابق اس ابہام کے تحت ہوگا جو توس اور اس کے نکلے کے درمیان ہوتا ہے۔

اگر ان دو صورتوں میں ابہام کو رفع کر لیا جائے تو یہ مسئلہ

اس مسئلہ میں تحویل ہو جاتا ہے جس میں دو ضلع اور ان دونوں ضلعوں

کے مقابل کے زاوے دئے گئے ہوں۔ مساواتوں (۱) اور (۲) سے

$$\text{مس ب} = \frac{\text{مس} \times \text{ج} + \text{مس} \times \text{ج}}{\text{مس} \times \text{ج} + \text{مس} \times \text{ج}}$$

اور (۲) سے یہ معلوم ہو گا کہ اس جملہ میں ب لینا چاہئے یا ۱۸۰ + ب -  
 عمل حساب میں اختصار پیدا ہو گا اگر ہم یہ فرض کریں کہ  
 مس طہ = مس ا جم ج ، مس فہ = مس ج جم ا  
 اس لیے ب = طہ + فہ

قطبی مثلث سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس ب} = \frac{\text{مس ا جم ج} + \text{مس ج جم ا}}{\text{ا} - \text{مس ا جم ج مس ج جم ا}}$$

جس سے ب معلوم ہوتا ہے کیونکہ ب اور ب + ۱۸۰ کے درمیان  
 کا ابہام (۵) سے رفع ہو جاتا ہے۔ نیز اگر ہم رکھیں  
 مس طہ = مس ا جم ج ، مس فہ = مس ج جم ا  
 تو ب = ۱۸۰ - طہ - فہ

اگر کروئی مثلث کے تین ضلع دیے گئے ہوں تو اس کا حل حسب  
 تفصیل ذیل معلوم کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ ۲ = ب + ج تو

$$\text{مس } \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\text{جب (س - ب) جب (س - ج)}}{\text{جب س جب (س - ا)}}} \quad (۷)$$

جس سے ا معلوم ہوتا ہے اور اسی طرح متشابه ضابطوں سے ب اور ج  
 معلوم ہوتے ہیں۔

اگر تین زاویے ا ، ب ، ج دیے جائیں تو رکھو  
 ۲ = س = (ا + ب + ج)

$$\text{مس } \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\text{جم س جم (س - ا)}}{\text{جم (س - ب) جم (س - ج)}}}$$

(۸) . . . . .

جس سے ا معلوم ہوتا ہے اور اسی طرح ب اور ج۔





یہ آسانی سے بتلایا جاسکتا ہے کہ جب کبھی کسی کروی مثلث کے دو ضلع اور ایک زاویہ، یا دو زاوے اور ایک ضلع دے جائیں تو اس مثلث کو پرنسپل کے قاعدوں کے ذریعہ حل کیا جاسکتا ہے بشرطیکہ اس کے ایک راس سے مقابل کے ضلع پر عمود ڈالکر اسے دو قائم الزاویہ مثلثوں میں تقسیم کر دیا جائے (دیکھو مثال ۲ صفحہ ۱۱)۔

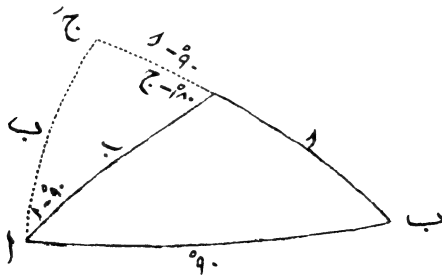
ربعی مثلث (ج = ۹۰) کے ضابطے بھی (شکل ۳) سے لکھ لئے جاسکتے ہیں۔ چنانچہ محیط کے بیرونی جانب جو دائری اجزاء لکھے گئے ہیں ان پر پرنسپل کے قاعدوں کا استعمال کرنے سے ربعی مثلث کے دس ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً ۱ اور ۹۰۔ ب کو درمیانی اجزاء لینے سے علی الترتیب ضابطے

$$\text{جب } \angle = \text{جب } \angle \text{ جب } \angle$$

$$\text{جم } \angle = \text{نس } \angle \text{ نم } \angle$$

اور حاصل ہوتے ہیں۔

قائم الزاویہ مثلث اور ربعی مثلث کے درمیان جو رشتہ یہاں مضمون ہے اسے شکل (۴) میں دکھایا گیا ہے۔ اگر  $\angle \text{ج} = ۹۰^\circ$  اور  $\angle \text{ب} = ۹۰^\circ$  کو  $\angle \text{ج}$  تک اتنا خارج کیا جائے کہ  $\angle \text{ج} = ۹۰^\circ$  تو زاویہ  $\angle \text{ج} = ۹۰^\circ$  اب قائم الزاویہ مثلث  $\angle \text{ج}$  پر پرنسپل کے قاعدوں کا استعمال کرنے سے ربعی مثلث  $\angle \text{ب}$  کے ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔



شکل (۴)

لوکارتم۔ مروجہ ترقیم جو مثلثی تفاعلوں کے لوکارتم لکھنے میں استعمال کی جاتی ہے حسب ذیل مثال سے واضح ہوگی۔

۲۵ کی طبعی جیب تمام ۰.۶۳۰۷۸ ہے اور

لوک جم ۲۵ = لوک ۰.۶۳۰۷۸ - لوک ۱۰ = ۰.۲۲۷۲۲

منفی لوکارتموں کے استعمال کی تکلیف سے بچنے کے لئے اسے بعض اوقات ۶۲۷۹۵ + لکھا جاتا ہے جو

$$-۰.۶۵۷۲۷۹۵ + ۱ -$$

کا قائم مقام ہے۔

ہم بالعموم جدولوں کے زیادہ مروج طریقہ کو اختیار کریں گے اور ہر مثلثی تفاعل کے لوکارتم میں ۱۰ کا اضافہ کرینگے۔ اس تبدیلی کے بعد لفظ لوک کی بجائے صرف ل استعمال کیا جائے گا۔ مثلاً پچھلی مثال میں ل کو ۶۲۷۹۵ لکھا جاسکتا تھا۔ زیادہ عام صورت میں

$$ل جم طہ = لوک جم طہ + ۱۰$$

اگر اس امر کا ظاہر کرنا ضروری ہو کہ وہ مثلثی تفاعل جس کا لوکارتم لیا گیا ہے ایک منفی عدد ہے تو اس لوکارتم کے بعد ہم بالعموم (ن) لکھیں گے۔ مثلاً اگر کسی جملہ میں جم ۱۵۵ جزو ضربی کے طور پر واقع ہو تو ہم اس کا جدولی لوکارتم ۶۲۷۹۵ (ن) لکھیں گے جہاں ۶۲۷۹۵ = ل جم ۲۵

اکثر ایسا ہوتا ہے کہ کسی عمل حساب کے پہلے حصہ میں طہ متعین ہو جائے (۷) کے بعد اس کے بعض مثلثی تفاعلوں کو اس عمل حساب کے دوسرے حصہ میں استعمال کرنا پڑتا ہے۔ اس دوسرے حصہ عمل میں یہ تصفیہ کرنا پڑتا ہے کہ آیا ہم وہ ضابطہ استعمال کریں جو ل جب طہ پر منحصر ہے یا وہ ضابطہ جو ل جم طہ پر منحصر ہے۔ ہم جو ضابطہ چاہیں استعمال کر سکتے ہیں لیکن اگر طہ تقریباً صفر ہو یا تقریباً ۹۰ تو ان میں سے ایک ضابطہ بغیر یقینی ہو جائے گا

ل کو جدولی لوکارتم کہتے ہیں۔



لی مم ل ۸۵ ۸۱ ۹۶ ۱۸۱

$$ل = ۸۶^{\circ} ۱۳' ۲۴''$$

(۸) مثال ۲۔ قائم الزاویہ مثلثوں کے طریقہ سے ل اور ب معلوم کرو جبکہ

$$ب = ۵۷^{\circ} ۴۲' ۳۹''، ج = ۱۹^{\circ} ۱۸' ۱۲''، ل = ۱۲۰^{\circ} ۱۲' ۳۶''$$

اب پر عمود ج پ (= ع) کھینچو۔ تب

$$لی جب ب ۴۲۳۲.۰۴۹۹$$

$$لی جب ل ۴۴۰.۶۶۳۹$$

$$لی جب ع ۹۵۰.۹۶۳۶$$

$$مس ب ۲۴۵۴.۳۲۱۹$$

$$جم (ل - ا) ۵۴.۱۷۱۷$$

$$مس م ۸۰۶.۱۰۶۰$$

$$جم ع ۹۱۲۲۳۸$$

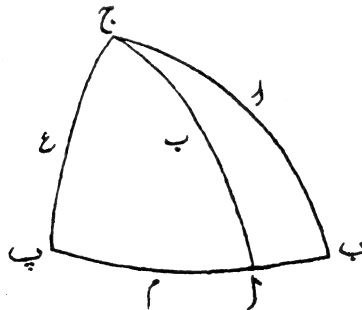
$$جم (ج + م) ۸۳۲۶۲۶$$

$$جم ل ۵۷۷۷۰۵$$

$$مس ع ۱۸۱۳۲۹.۰۲$$

$$قم (ج + م) ۸۸۷۲۰۷$$

$$مس ب ۱۰۵۱۰۷۱.۰۱$$



شکل (۵)

## ۲۔ ڈلمبر اور نیپیر کی تمثیلات۔

علم ہیئت کروئی میں حسب ذیل مساواتیں بڑی فائدہ مند ہیں :-

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} \text{ (ب-ا)} = \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} \text{ (ا-ب)} \quad (۱۶)$$

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} \text{ (ا-ب)} = \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} \text{ (ا+ب)} \quad (۱۷)$$

$$\text{جم } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} \text{ (ا+ب)} = \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} \text{ (ا-ب)} \quad (۱۸)$$

$$\text{جم } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} \text{ (ا+ب)} = \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ج جب } \frac{1}{p} \text{ (ا+ب)} \quad (۱۹)$$

یہ مساواتیں گاؤس (Gauss) کی تمثیلات کے نام سے بھی مشہور ہیں مگر ان کا انکشاف فی الحقیقت ڈلمبر نے کیا تھا۔

ڈلمبر کی تمثیلات چونکہ لوگاریتمی عمل حساب میں ضابطوں (۱)، (۲)، (۳) اور (۴)، (۵)، (۶) کی بہ نسبت زیادہ سہولت و آسانی پیدا کرتی ہیں اسلئے کروئی مشنوں کے حل کرنے میں جبکہ 'ا' ب اور ج یا 'ا' ب اور ج دئے گئے ہوں انہیں ترجیح دی جاتی ہے۔

ان ضابطوں کا یاد رکھنا اکثر تکلیف دہ ہے جب تک کہ سر رامبو (Rambaut) کے قاعدہ سے مدد نہ لی جائے۔

ہم متقارروں کی یہ دو صفتیں

$$\frac{1}{p} \text{ (ا+ب)} \text{، } \frac{1}{p} \text{ (ا-ب)} \text{، } \frac{1}{p} \text{ ج}$$

$$\frac{1}{p} \text{ (ا+ب)} \text{، } \frac{1}{p} \text{ (ا-ب)} \text{، } \frac{1}{p} \text{ ج}$$

کہتے ہیں جہاں ج = ۹۸۰ - ج - تب سر امبو کا قاعدہ حسب ذیل ہے:۔ (۹)  
ایک نصف میں کا مجموعہ (فرق) ہمیشہ دوسری صف کی جیب النام

(جیب) کے ساتھ وابستہ ہوتا ہے۔

چنانچہ ڈلمبر کی وہ تینیل جس میں جب  $\frac{1}{4}$  (ا - ب) شامل ہے حاصل کرنے کے لیے ر امبو کے قاعدے سے مستنبط ہوتا ہے کہ

(۱)  $\frac{1}{4}$  ج جیب کے ساتھ داخل ہونا چاہئے کیونکہ (ا اور ب) ایک فرق کے طور پر داخل ہوتے ہیں،

(۲) ا اور ب، فرق کے طور پر داخل ہونے چاہئیں کیونکہ

$\frac{1}{4}$  (ا - ب) جیب کے ساتھ داخل ہوتا ہے،

(۳)  $\frac{1}{4}$  (ا - ب) جیب کے ساتھ داخل ہونا چاہئے کیونکہ (ا

اور ب) فرق کے طور پر داخل ہوتے ہیں،

(۴)  $\frac{1}{4}$  ج جیب کے ساتھ داخل ہونا چاہئے کیونکہ ا اور ب

فرق کے طور پر شامل ہوتے ہیں۔

پس تینیل لکھی جاسکتی ہے

جب  $\frac{1}{4}$  ج جب  $\frac{1}{4}$  (ا - ب) = جب  $\frac{1}{4}$  ج جب  $\frac{1}{4}$  (ا - ب)

= جم  $\frac{1}{4}$  ج جب  $\frac{1}{4}$  (ا - ب)

ڈلمبر کی تمثیلات کے استعمال کی وضاحت کے لیے ہم وہ کردی مثلث

لے سکتے ہیں جس میں

$$۱ = ۵۴^{\circ} ۴۸' ۶۲'' \quad ، \quad ۱ = ۳۶^{\circ} ۲۶' ۹۲''$$

$$ب = ۳۶^{\circ} ۴۲' ۵۴'' \quad ، \quad ب = ۳۰^{\circ} ۲۹' ۴۱''$$

$$ج = ۶۰^{\circ} ۳۶' ۲۵'' \quad ، \quad ج = ۱۳^{\circ} ۱۱' ۲۹''$$

ہم فرض کریں گے کہ 'ا' ب 'ج' دے گئے ہیں اور (ب اور

ج مطلوب ہیں۔

نیچے لکھی ہوئی عددی قیمتیں متناظر مثلثی تفاعلوں کے جدولی لوکارٹم ہیں:

$\frac{1}{4}$ ج = ۳۶۵۵ ۳۵ ۱۴	
$\frac{1}{4} (ب+۱) = ۶۶۵۵ ۱۵ ۹۰$	$\frac{1}{4} (ب-۱) = ۲۵ ۳۳ ۰$
جب $\frac{1}{4} (ب-۱)$	۸۵۶۴۸۶۲۸۶
جم $\frac{1}{4}$ ج	۹۵۹۸۵۴۵۴۸
جب $\frac{1}{4} (ب+۱)$	۸۵۶۴۳۳۸۶۴
جب $\frac{1}{4}$ ج	۹۵۹۳۸۶۴۵۲
جم $\frac{1}{4}$ ج	۹۵۴۰۱۳۳۰۱
جم $\frac{1}{4} (ب-۱)$	۹۵۳۴۰۰۰۵۳
جم $\frac{1}{4}$ ج	۹۵۹۹۹۵۶۹۰
جم $\frac{1}{4}$ ج	۹۵۹۸۵۴۵۴۸
جم $\frac{1}{4} (ب+۱)$	۹۵۹۸۵۳۲۶۸
جم $\frac{1}{4} (ب+۱)$	۹۵۶۹۵۴۹۹۹
جب $\frac{1}{4}$ ج	۹۵۴۰۱۳۳۰۱
جم $\frac{1}{4} (ب+۱)$	۹۵۰۹۶۸۳۰۰
جم $\frac{1}{4}$ ج جب $\frac{1}{4} (ب+۱)$	۹۵۹۸۵۳۲۶۸
جم $\frac{1}{4}$ ج جب $\frac{1}{4} (ب-۱)$	۹۵۰۹۶۸۳۰۰
مس $\frac{1}{4} (ب+۱)$	۰۵۸۸۸۴۹۶۸
جب $\frac{1}{4}$ ج جب $\frac{1}{4} (ب-۱)$	۸۵۶۴۳۳۸۶۴
جب $\frac{1}{4}$ ج جب $\frac{1}{4} (ب-۱)$	۹۵۳۴۰۰۰۵۳
مس $\frac{1}{4} (ب-۱)$	۹۵۲۹۴۳۸۱۱
جب $\frac{1}{4}$ ج جب $\frac{1}{4} (ب-۱)$	۹۵۳۴۰۰۰۵۳

(۱۰)

لہ جب  $\frac{1}{4}$  ج جب  $\frac{1}{4} (ب-۱)$  کی بجائے ہم اس کو ترجیح دیتے ہیں کیونکہ  
جم  $\frac{1}{4} (ب-۱) < جب \frac{1}{4} (ب-۱)$  - دیکھو صفحہ ۱۰۔

جم ۱ (ا-ب) ۹۵۹۹۱۷۳۵۲

جب ۱/۲ ج ۰۱ ۸۲ ۳۳ ۹

$\frac{9}{8} \times \frac{9}{8} = \frac{81}{64}$

جب  $\frac{1}{p}$  (ا+ب) ۹،۹۹۶۴۰۱۲

۹,۹۸۸۹۲۵۲ جم  $\frac{1}{2}$  ج

جب  $\frac{1}{p}$  ج ۹۶۳۴۸۲۷۰۱

۹، ۹ ۸۸۹۲۵۶ تم ۱ ج

مس ۱/۲ ج ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ج ۱/۲ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

اس لیے ۱ = ۳۶۴۹۳ ، ب = ۳۰۲۹۰۷ ، ج = ۳۶۲۵۰  
 ڈبلر کی تمثیلوں سے حسب ذیل چار ضابطے آسانی کے ساتھ حاصل  
 ہوتے ہیں، یہ ضابطے پیپیر کے تمثیلوں کے نام سے مشہور ہیں۔

$$(۲۰) \quad \text{مس } \frac{1}{۲} = \frac{\text{جم } \frac{1}{۲} (ب-۱)}{\text{جم } \frac{1}{۲} (ب+۱)} \quad \text{مس } \frac{1}{۲} ج$$

$$\text{مس } \frac{1}{4} (ب - ا) = \frac{\text{جب } \frac{1}{4} (ا - ب)}{\text{جب } \frac{1}{4} (ا + ب)} \text{ مس } \frac{1}{4} ج \quad (۲۱)$$

$$\text{مس } \frac{1}{r} (b+1) = \frac{\text{جم } \frac{1}{r} (b-1)}{\text{جم } \frac{1}{r} (b+1)} \text{ مم } \frac{1}{r} \text{ ج } (22)$$

$$(۲۳) \quad \text{مس } \frac{1}{2} (ب-۱) = \frac{\text{جب } \frac{1}{2} (ب-۱)}{\text{جب } \frac{1}{2} (ب+۱)} \text{ نم } \frac{1}{2} ج$$

نپیر کی تمیشلوں کے ذریعہ مثلث کا حل معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل

۱۔ جم  $\frac{1}{2}$  ج  $\frac{1}{4}$  جم  $\frac{1}{4}$  (ا + ب) کی بجائے ہم اس کو ترجیح دیتے ہیں  
کیونکہ جب  $\frac{1}{4}$  (ا + ب) < جم  $\frac{1}{4}$  (ا + ب)



مثال دی جاتی ہے۔

۱ = ۲۳° ۲۴' ، ب = ۱۵° ۱۵' ، ج = ۲۹° ۲۳' ،  
ہم چار ہندسی لوکار تم استعمال کریں گے جو اکثر مقاصد کے لیے کافی صحیح ہیں۔

$$\text{ل جم } \frac{1}{4} (\text{ب} - \text{ا}) = ۹۶۹۵۶ ، \text{ل جب } \frac{1}{4} (\text{ب} - \text{ا}) = ۹۶۱۳۸۹$$

$$\text{ل قط } \frac{1}{4} (\text{ب} + \text{ا}) = ۰.۰۱۵۸ ، \text{ل قم } \frac{1}{4} (\text{ب} + \text{ا}) = ۰.۵۵۷۷$$

$$\text{ل مس } \frac{1}{4} \text{ ج} = ۹۶۸۸۰.۹ ، \text{ل مس } \frac{1}{4} \text{ ج} = ۹۶۸۸۰.۹$$

$$\text{ل مس } \frac{1}{4} (\text{ب} + \text{ا}) = ۹۶۸۹۲۳ ، \text{ل مس } \frac{1}{4} (\text{ب} - \text{ا}) = ۹۶۶۰۷۰$$

$$\frac{1}{4} (\text{ب} + \text{ا}) = ۵۸۳۷ ، \frac{1}{4} (\text{ب} - \text{ا}) = ۲۰۲۲$$

$$\text{ا} = ۶۰.۰ ، \text{ب} = ۱۵.۵۶$$

∴

اب چونکہ  $\frac{1}{4} (\text{ب} - \text{ا})$  اور  $\frac{1}{4} (\text{ب} + \text{ا})$  دونوں  $> ۹۰$  ایسے ج معلوم

کرنے کے لیے ضابطہ (۲۲) مناسب ہے جسے لکھا جاسکتا ہے

$$\text{مس } \frac{1}{4} \text{ ج} = \text{جم } \frac{1}{4} (\text{ب} - \text{ا}) ، \text{قط } \frac{1}{4} (\text{ب} + \text{ا}) ، \text{قم } \frac{1}{4} (\text{ب} + \text{ا})$$

$$\text{پس ل جم } \frac{1}{4} (\text{ب} - \text{ا}) = ۹۶۹۶۷۱$$

$$\text{ل قط } \frac{1}{4} (\text{ب} + \text{ا}) = ۰.۰۱۰۳۳$$

$$\text{ل قم } \frac{1}{4} (\text{ب} + \text{ا}) = ۰.۵۶۱۴$$

$$\text{ل مس } \frac{1}{4} \text{ ج} = ۰.۶۳۱۸ ، \text{ج} = ۱۵۳.۴۳$$

۳۔ صحت جو لوکار تمی عمل حساب میں حاصل ہو سکتی ہے۔

جب کسی مثلثی تفاعل کا لوکار تم دیا جاتا ہے تو بالعموم کافی صحت کے ساتھ زاوے کا معلوم کرنا ممکن ہے۔ لیکن اکثر ایسی صورتیں پیش آتی ہیں



اسے لکھا جاسکتا ہے

۴۲ = لا جب ۲ طہ ۱۱ ۴۲ اس لئے طہ کی محصور قیمت  
جس کے لے مس طہ دیا گیا ہو آ غلط نہیں ہو سکتی الا انکہ لے مس طہ خود  
۴۲ ۰۰۰۰۰ کی حد تک غلط ہو۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ جب پانچ ہندسی نوکار تم استعمال کئے جائیں اور  
عمل حساب آخری اعشاریہ میں دو اکائیوں کے اندر تک ٹھیک ہو تو کسی زاویے  
کی خطا جو اس کے ماس سے متعین کیا گیا ہو ۵ ثانیوں سے بڑھ نہیں سکتی۔

مثال ۲۔ کسی زاویے کے لے جب کے آخری اعشاریہ میں ایک  
اکائی کے تغیر سے اس زاویہ کی قیمت میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے اس کی تحقیق  
کرو اور بتاؤ کہ تمام صورتوں میں زیادہ صحت اس میں ہے کہ اس زاویہ کو اس کی جیب  
کی بجائے اس کے ماس سے متعین کیا جائے۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ اگر طہ ایک چھوٹا زاویہ ہو تو اس کی قیمت  
ثانیوں میں اس جملہ

قم آ جب طہ (قط طہ) ۱

سے تقریبی طور پر حاصل ہوتی ہے اور بتاؤ کہ اگر طہ ۱۰ کے اتنا بڑا بھی ہو تو یہ جملہ آ  
کی حد تک غلط نہیں ہوگا۔

مثال ۴۔ اگر طہ ایک چھوٹا زاویہ ہو جسے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہے  
تو ثابت کرو کہ

ل جب طہ = لوک طہ + مس

جہاں مس = ۱ (۲۰ لے جم طہ) - ۵۳ ۳۱۴ ۴۲۵۱  
اور مثلاً ثابت کرو کہ اگر طہ = ۲۰ ۰۰۰ ۲۰ تو

ل جب طہ = ۸۶ ۰۰۲ ۴۱ ۸۲

مقدار مس برصن (Bruhn) کی جدولوں میں دی جاتی ہے۔

مثال ۵۔ طہ کی قیمت معلوم کرو اگر ل جب طہ = ۸۶ ۰۱۲۳ ۴۵۶

اُن جدولوں سے جو بیگے (Bagay) کی جدولوں کی مانند ہوں ہر ثانیہ کیلئے  
 مثلثی تفاصول کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ ان سے معلوم ہوگا کہ مطلوبہ زاویہ  $۳۲^{\circ} ۳۵'$   
 سے زیادہ فرق نہیں رکھتا اور یہ فرق ایک ثانیہ کی چھوٹی کسر سے زیادہ نہیں ہے۔  
 اس کسر کو معلوم کرنے کے لیے ہم  $\frac{1}{3} = (۲۰ + \text{لی جم طہ}) - ۵۳۱۴۲۲۵۱$   
 کا حساب لگاتے ہیں جو لی جم طہ میں طہ کی بجائے  $۳۲^{\circ} ۳۵'$  درج کرنے سے  
 $۴۷۶۸۵۵۶۷۲$  ہو جاتا ہے۔

تب مساوات  $\text{لوک طہ} = \text{لی جب طہ} - \text{س سے}$

$$\text{طہ} = ۲۱۲۲۵۱۲$$

## ۴۔ کروئی مثلث میں تفرقی ضابطے۔

کوئی چھ زاوے  $\text{ا}، \text{ب}، \text{ج}، \text{د}، \text{ه}، \text{و}$  بالعموم کروئی مثلث کے  
 ضلع اور زاوے نہیں ہوں گے۔ اگر ایسا ہو تو ان زاویوں کو تین شرطیں  
 پوری کرنی ہوں گی۔ یہ اس امر سے ظاہر ہے کہ اگر فی الواقعہ یہ چھ مقداریں  
 ایک مثلث کے اجزاء ہیں تو ان میں سے کوئی تین دے جانے پر دوسری تین  
 مقداریں متعین ہونی چاہئیں۔

مان لو کہ یہ چھ مقداریں فی الواقعہ ایک کروئی مثلث کے اجزاء ہیں  
 اور فرض کرو کہ ان سب میں علی الترتیب چھوٹے اضافے  $\text{ا}، \text{ب}، \text{ج}، \text{د}، \text{ه}، \text{و}$   
 اس طرح متعین کرنے کے بعد وہ بالعموم کسی کروئی مثلث کے اجزاء نہ رہیں گے۔  
 اگر وہ کسی کروئی مثلث کے اجزاء ہوں تو انہیں تین شرطیں پوری کرنی چاہئیں  
 جنہیں ہم اب معلوم کریں گے۔

اساسی ضابطہ

$$\text{جم} = \text{ا} = \text{جم ب جم ج} + \text{جم ج جب ج} - \text{جم ب جم د}$$

کو تفرق کرو تو

$$\text{جم} = \text{ا} = \text{جم ب جم ج} - \text{جم ج جب ج} - \text{جم ب جم د}$$

+ جم ب جب ج جم ا مف ب + جب ب جم ج جم ا مف ج  
- جب ب جب ج جب ا مف ا

لیکن دفعہ (۱) کے ضابطہ (۲) سے

جب ا جم ب = جم ب جب ج - جب ب جم ج جم ا

جب ا جم ج = جب ب جم ج - جم ب جب ج جم ا

اس لئے درج کرنے اور متشابه ضابطوں کو ساتھ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

مف ا = جم ج مف ب + جم ب مف ج + ہ جب ب جب ج مف ا  
مف ب = جم ا مف ج + جم ج مف ا + ہ جب ج جب ا مف ب  
مف ج = جم ب مف ا + جم ا مف ب + ہ جب ا جب ب مف ج

جہاں ہ = جب ا جب ا = جب ب جب ب = جب ج جب ج

اسی طرح عمل کرو تو ضابطوں (۴) اور (۵) سے حسب ذیل مساواتیں حاصل ہوں گی

مف ا = جم ج مف ب - جم ب مف ج + ہ جب ب جب ج مف ا  
مف ب = جم ا مف ج - جم ج مف ا + ہ جب ج جب ا مف ب  
مف ج = جم ب مف ا - جم ا مف ب + ہ جب ا جب ب مف ج

پس ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ اگر 'ا' ب 'ج' 'ا' ب 'ج' ایک کروی  
مثلث کے اجزاء ہوں تو مساواتوں (۴) یا (۵) میں سے کسی ایک جٹ سے وہ تین  
ضروری اور کافی شرطیں بیان ہوتی ہیں کہ

ا + مف ا + ب + مف ب + ج + مف ج + ا + مف ا + ب + مف ب + ج + مف ج  
بھی ایک کروی مثلث کے اجزاء ہوں -

(۱۲) اگر ان تفرقوں میں سے تین مسفر ہوں تو بقیہ تین تفرقے بھی بالعموم صفر  
ہوں گے - یہ ام مساواتوں سے ظاہر ہے اور نیز اس امر سے بھی کہ اگر کسی  
کروی مثلث کے تین اجزاء نہ بدلیں تو دوسرے تین اجزاء بھی بالعموم نہیں بدلیں گے۔  
اس بیان کی ایک مستثنیٰ صورت ذیل کی مثال سے ملتی ہے - فرض  
کرو کہ ج = ۹۰ اور مف ب = .، مف ج = .، مف ا = . - اس صورت میں



جیسی مخصوص صورتیں شامل ہیں۔  
فرض کرو کہ لا کو ایک قیمت مفرد دی گئی ہے تو اس کے جواب میں  
ما کی قیمت ما، رشتہ ما = ف (۱) سے حاصل ہوگی۔ فرض کرو کہ اس کے  
بعد (ا) میں لا کی بجائے متواتر ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ درج کئے گئے ہیں  
اور ان کے جواب میں ما کی قیمتیں علی الترتیب ما، ما، ما، ما، ما، ما، ما، ما، ما، ما  
ہوئی ہیں۔ تب کسی جدول کا لازمی خاصہ یہ ہے کہ اس کے ایک  
ستون میں ہم لا کی قیمتیں یعنی ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ رکھتے ہیں اور دوسرے  
ستون میں ما کی متناظر قیمتیں یعنی ما، ما، ما، ما، ما، ما، ما، ما، ما، ما، ..... -

لا کی قیمت جسے اکثر دلیل کہتے ہیں مساوی وقفوں ۱ سے برابر  
آگے بڑھتی ہے اور ما کی ہر متناظر قیمت کو جسے اکثر تفاعل کہتے ہیں اتنی زیادہ  
صحت کے ساتھ محسوب کیا جاتا ہے جتنی اس مقصد کے لیے ضروری ہے جس کے  
لیے جدول تیار کی جا رہی ہے۔

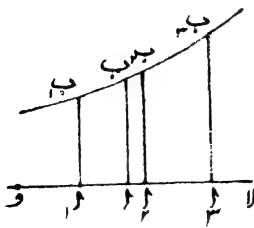
ما = ف (لا) کی جدول

لا	ما
۰	ما
۱	ما
۲	ما
۳	ما
.....	.....

ایسی کسی جدول کی غایت یہ ہوتی ہے کہ اس سے دلیل کی دی ہوئی  
قیمت کے جواب میں تفاعل کی قیمت معلوم ہو یا تفاعل کی دی ہوئی قیمت  
کے جواب میں دلیل کی قیمت معلوم ہو۔

اکثر ایسا ہوتا ہے کہ تفاعل کی عددی قیمت کو ایسی دلیل کے جواب میں معلوم کرنا ہوتا ہے جبکہ یہ دلیل صریحاً جدول میں موجود نہ ہو بلکہ وہ دلیل کی دو متصلہ جدولی قیمتوں کے درمیان واقع ہو۔ اس کا عکس بھی اکثر درمیش ہوتا ہے یعنی تفاعل کی دی ہوئی قیمت کے جواب میں دلیل کی قیمت معلوم کرنا پڑتا ہے جبکہ تفاعل کی دی ہوئی قیمت دو متصلہ جدولی قیمتوں کے درمیان واقع ہو۔ ممکن ہے پہلے یہ خیال آئے کہ ان میں سے کسی صورت میں ہم اصلی مساوات (آ) کی طرف رجوع ہوں اور اس سے مطلوب قیمتیں معلوم کریں۔ لیکن یہ ضروری نہیں ہے تفاعلی رشتہ کی خاصیت جدول میں اس قدر سرایت کر جاتی ہے کہ جب 'لا' اور 'ما' میں سے کوئی ایک دیا جائے تو دوسرا 'بینی' اور 'اج' کے فن سے جسکی تشریح اب کی جائے گی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اس فن کی نوعیت سب سے زیادہ صاف طور پر علم ہندسہ کے ذریعہ واضح کی جاسکتی ہے۔ ہم منحنی  $ما = ف (لا)$  کو معمولی طریقہ سے مرتسم کر سکتے ہیں۔ مبداء و سے محور لا پر نقطوں 'لا'، 'لا'، 'لا'، 'لا' کا نشان لگاؤ جو و سے علی الترتیب '۱'، '۲'، '۳'، '۴' فاصلوں پر ہوں۔ ضابطہ  $ما = ف (لا)$  سے 'ما' کی متناظر قیمتیں 'ما'، 'ما'، 'ما'، 'ما'۔ محسوب کرو۔ پھر 'لا'، 'لا'، 'لا'، 'لا' (شکل ۶) پر معین 'لا'، 'لا'، 'لا'، 'لا' قائم کرو جو علی الترتیب قیمتوں 'ما'، 'ما'، 'ما'، 'ما' کے مساوی ہوں۔ نقطے 'ب'، 'ب'، 'ب'، 'ب' وغیرہ بالعموم ایسے واقع ہوں گے کہ ان میں سے گذرنا ہوا ایک منحنی صاف طور پر کھینچا جاسکے گا۔ اگر نقطے 'لا'، 'لا'، 'لا'، 'لا' کافی طور پر باہم نزدیک ہوں یعنی اگر ہ کافی

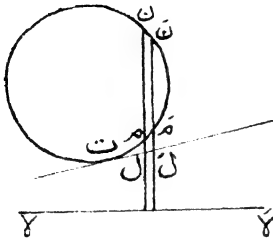


شکل (۶)



چھوٹا ہو تو منحنی کی شکل اس قدر صاف طور پر واضح ہوگی کہ کسی قسم کے ابہام کا بہت کم امکان ہوگا اور منحنی  $ما = ف (لا) جو ب$ ،  $ب$ ،  $ب$  میں سے گزرتا ہے ان حدود کے اندر اس منحنی سے زیادہ فرق نہیں رکھے گا جو ابھی ان نقطوں میں سے کھینچا گیا ہے۔ بلاشبہ حقیقی منحنی تفاعل  $ما = ف (لا)$  کی نوعیت پر منحصر ہوگا۔ لیکن چونکہ بنی ادراج کے فن میں ہمیں منحنی کے صرف ایک چھوٹے حصے سے واسطہ رہے گا اس لیے زیر بحث منحنی کی مخصوص خاصیتوں پر غور کرنا غیر ضروری ہے۔

پس موجودہ مقصد کے لیے اصل منحنی  $ما = ف (لا)$  کا استعمال ضروری نہیں ہے بلکہ کسی لٹمی منحنی کا۔ ہم پہلے لٹمی دائرہ لیتے ہیں جو بنی ادراج کی حد تک کافی طور پر صحیح ہو۔ بالعموم ایسا دائرہ کھینچنا ممکن ہوتا ہے جس کی قوس دے ہوئے منحنی کی قوس کے ساتھ کسی دے ہوئے نقطہ پر اس قدر عین مطابقت ہو کہ چھوٹے فاصلے کے لئے دائرہ کا منحنی سے اختلاف نا قابل قدر ہو۔ اس لیے ہم اس چھوٹے حصے کو جس سے ہمیں واسطہ ہے دائری قوس کے طور پر تصور کر لیتے ہیں خواہ اصل منحنی کچھ بھی ہو۔ چنانچہ ہم  $ب$ ،  $ب$ ،  $ب$  میں سے گزرتا ہوا ایک دائرہ کھینچتے ہیں اور مان لیتے ہیں کہ  $ب$ ،  $ب$  اور  $ب$  کے درمیان کسی نقطہ  $ب$  کے لیے دائرہ کا معین،  $لا$  کی قیمت کے جواب میں  $ما$  کی قیمت ہے۔ مثلاً اگر  $اب$  معین ہو تو  $اب$  تفاعل کی قیمت ہے جبکہ  $لا = و$ ۔ ہم  $اب$  کے لیے ایک جملہ معلوم کرنے میں اس دائرہ کا استعمال کریں گے اس جملہ میں صرف نقطہ  $ب$  کا فصل اور نقاط  $ب$ ،  $ب$ ،  $ب$  کے محدد شریک ہوں گے۔ بلاشبہ یہ،  $ما$  کی وہ قیمت نہیں ہوگی جو ضابطہ  $ما = ف (لا)$  سے حاصل ہوتی ہے لیکن اس سے زیادہ فرق بھی نہیں رکھیں گے۔ فرض کر دو کہ  $ت$  مہر  $ن$  ایک دائرہ ہے اور  $ت$  پر اس کا  $ماس$   $ت ل ل$  ہے۔ فرض کر دو کہ  $ل$   $ن$  اور  $ل$   $ن$  دو خط ہیں جو دونوں محور  $لا$  پر عمود ہیں۔ تب دائرہ کی خاصیت کی رو سے



شکل (۴)

$$ل م \times ل ن = ل ت$$

$$ل م \times ل ن = ل ت$$

اس لیے

$$\frac{ل م}{ل ن} \times \frac{ل ت}{ل ن} = \frac{ل م}{ل ن}$$

اب فرض کرو کہ ل ن

اور ل ن ت کے انتہائی

قریب آتے ہیں تب  $\frac{ل ن}{ل ن} = ۱$  اور

$$ل م : ل ت :: ل ت : ل ت$$

اب چونکہ نقطہ تماس کے قرب میں منحنی کی قوس اس کے لمبی دائرہ کی قوس سے ناقابل امتیاز ہے اس لیے ہمیں اپنی ادراج کا اصول حاصل ہوتا ہے جسے اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے :-

اگر تماس ل ت کیمنیچا گیا ہو جو منحنی کو دت پر مس کرتا ہے اور دت کے متصل ل م ایک معین ہو تو تماس اور منحنی کے درمیان معین کا مقطوعہ ل م دت ل کے مربع کے متناسب ہوگا۔

شکل (۸) میں و مبداء

ج کا معین ما اور دت کا معین

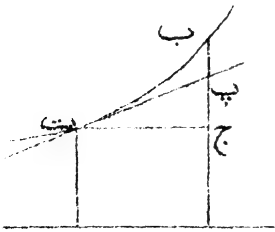
ما ہے۔ پس ج پ اے

بدلتا ہے جیسے پ ت اور

اس لیے ایسے بدلتا ہے جیسے

ج ت۔ نیز ج پ ایسے

بدلتا ہے جیسے ج ت۔ پس



شکل (۸)

اگر ب کا فصلہ لا ہو تو

ما - با = ل + لا + م لا  
جہاں ل اور م 'ت کے قریب نقطوں کے لیے مستقل ہیں۔ صریحاً یہ ایک  
مکانی کی مساوات ہے۔ اور م کو ن اور م میں بدل کر ہم مساوات بالا کو  
لکھ سکتے ہیں

ما = با + ل + لا + م لا (لا - ہ)  
ہم ل اور م کو اس امر پر غور کر کے معلوم کرتے ہیں کہ (ہ، ما، م) (۲، ہ، ما)  
منہجی پد کے نقطے ہوں۔ پہلے نقطہ سے حاصل ہوتا ہے

$$ل = \frac{ما - با}{ہ}$$

اور (۱۸) لا = ۲، ہ، ما = م رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ما = با + ۲(ما - با) + ۲م$$

$$ما = \frac{ما - با + ۲(ما - با) + ۲م}{۲}$$

اور اس لیے مساوات ہو جاتی ہے

$$ما = با + \frac{لا - لا}{ہ} + \frac{لا - لا}{۲} (ما - با + ۲ + ۲) \dots (۱)$$

فرض کرو کہ تفاعل ما کی تین متصل قیمتیں با، م، ما ہیں جہاں ہ  
دلیل کی دوسری اور پہلی قیمتوں کے درمیان فرق ہے اور نیز تیسری اور  
دوسری قیمتوں کے درمیان۔ پس کسی دلیل کے جواب میں جو پہلی دلیل سے  
بقدر لا کے بڑی ہو لیکن دوسری دلیل کے چھوٹی ہو مندرجہ بالا  
ضابطہ سے تفاعل کی مطلوب قیمت حاصل ہوتی ہے۔

اس ضابطہ میں جو مستقل ہیں ان کی قیمتیں بہت آسانی کے ساتھ  
جدول سے فرقوں کے طریقہ کے ذریعہ حاصل ہوتی ہیں :-

فرق دوم

فرق اول

ما

ما - ما

ما

ما - ۲ ما + ما

ما - ما

۲ ما

پہلے ستون میں ما کی تین متصل قیمتیں ہیں۔ دوسرے ستون میں قیمت اور اس کی باقی قیمت کے درمیان کے فرق ہیں تیسرے میں دوسرے ستون کے متصل ارقام کے فرق درج ہیں۔ تیسرے اور اس سے اعلیٰ تر فرق بھی حسب ضرورت اسی طرح معلوم کئے جاسکتے ہیں۔

اگر ہم اختصار کے مد نظر ما - ما = ط اور ما - ۲ ما + ما = ط لکھیں اور لا کی جگہ ت رکھیں کیونکہ وقت (ت) بہت سی مسائل میں بالعموم متبوع متغیر ہوتا ہے اور اگر فرق ھ کو وقت کی اکائی بنائیں تو مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$ما = ما + ت ط + \frac{ت(ت-۱)}{۲} ط$$

اس آخری مساوات کو ت کے لحاظ سے تفرق کر تو ت کے لحاظ سے ما جس شرح سے بدلتا ہے وہ

$$\frac{فرما}{وقت} = ط - \frac{۱}{۲} ط + ت ط$$

ہے جس سے یہ ظاہر ہے کہ اضافہ کی شرح خود یکساں طور پر بڑھتی ہے۔ وقت کی دو اکائیوں میں تفاعل کی قیمت ما سے ما تک بڑھتی ہے اس لیے اس کے اضافہ کی اوسط شرح فی اکائی وقت  $\frac{۱}{۲} (ما - ما)$  ہے اور چونکہ یہ شرح یکساں طور پر بڑھتی ہے اس لیے یہ اپنی اوسط قیمت اس وقت اختیار کرے گی جبکہ نصف وقت گزر چکا ہو یعنی جبکہ تفاعل کی

قیمت ما ہو۔ پس ہم حسب ذیل نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔  
 کسی آن ت پر تفاعل جس شرح سے فی اکائی وقت بدلتا ہے وہ،  
 تفاعل کی اُن قیمتوں کے فرق کا نصف ہے جو تفاعل ت کے بعد  
 وقت کی ایک اکائی پر اور ت سے قبل وقت کی ایک اکائی پر اختیار  
 کرتا ہے۔

بینی اور اراج کے عمل کو تیز تر کرنے کے لیے ایفیمس میں اکثر ایک اور  
 ستون کا اضافہ کیا جاتا ہے جس سے متناظر لمحہ پر تفاعل کے تغیر کی شرح  
 حاصل ہوتی ہے۔ ہم اسے ایک مثال سے واضح کریں گے۔  
 فرض کرو کہ چاند کا جنوبی میل بتاریخ ۶ ستمبر ۱۹۵۵ء گرینوچ کی اوسط دوپہر  
 ۱۵+ ت گھنٹوں بعد معلوم کرنا ہے۔

۱۵ گھنٹوں گ - ۱ - (د گرینوچ اوسط وقت) پر چاند کا جنوبی میل  
 ایفیمس سے ۱۹ ۳۸ ۳۳ حاصل ہوتا ہے اور ۱۰ منٹ میں تغیر ۲۳ ۵۵  
 ہے چاند جنوب کی طرف حرکت کر رہا ہے۔ اسی دن ۱۶ گھنٹوں پر جدول کی  
 دوسری سطر سے ۱۸ منٹ میں تغیر ۲۲ ۴۴ حاصل ہوتا ہے اور چونکہ تغیر کی  
 شرح یکساں طور پر طعنتی ہوئی تصور کی جاسکتی ہے اس لیے دوپہر کے بعد  
 (۱۵+ ۱/۴) ت گھنٹوں پر تغیر فی دس منٹ یہ ہے

$$۲۳ ۵۵ - ۲۲ ۴۴ = ۱۱ ۱۱ \text{ ت}$$

تغیر کی اس اوسط شرح کو ۱۵ گھنٹوں اور ۱۵+ ت گھنٹوں کے درمیان  
 پورے وقفہ کے لیے مان لیا جاسکتا ہے اور چونکہ ت کو گھنٹوں میں بیان  
 کیا گیا ہے اس لیے اس وقفہ میں کل تغیر اوسط شرح کو ۶ ت سے ضرب  
 دینے سے حاصل ہوتا ہے۔ پس چاند کا جنوبی میل بتاریخ ۶ ستمبر ۱۹۵۵ء  
 ۱۵+ ت گھنٹوں پر حسب ذیل ہے

$$۱۹ ۳۸ ۳۳ + ۱۱ ۱۱ \text{ ت} + ۲۲ ۴۴ - ۲۳ ۵۵ = ۲۸ ۳۲ \text{ ت}$$

بینی اور اراج کے ضابطے مسئلہ بالا کے معکوس مسئلہ میں وہ وقت  
 معلوم کرنے کے لیے بھی استعمال کئے جاتے ہیں جس پر کوئی خاص تفاعل

کوئی مقررہ قیمت اختیار کرنا ہے مثلاً فرض کرو کہ ۶ ستمبر ۱۹۰۵ء کو وقت معلوم کرنا ہے جبکہ چاند کا جنوبی میل  $۳۰^{\circ} ۱۸'$  ہے۔ مساوات بالا سے

$$۳۰^{\circ} ۱۸' = ۳۸^{\circ} ۱۲' + ۳۱^{\circ} ۳۸' \text{ آت} - ۳۲^{\circ} ۳۵' \text{ ت}^۲$$

یہ مساوات ت میں دو درجہ ہے اور آخری رقم کو نظر انداز کرنے سے مطلوبہ اصل تقریباً  $۰.۵۸۶$  معلوم ہوتی ہے۔ اصلی مساوات میں اس قیمت کو ت میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۱۱۸۶۸ = ۱۳۱۵۳ \text{ آت} - ۲۲۵۳$$

(۲۰) اس لیے ت =  $۰.۵۸۶$  اور مطلوبہ وقت ہے  $۱۵^{\circ} ۵۱.۳$  (گ) =  
 گھنٹے، منٹ، ثانیے) - مساوات درجہ دوم کی دوسری اصل ہمارے مقصد کے لیے بے کار ہے۔  
 مندرجہ بالا مینی ادراج کے اساسی ضابطہ کی تعمیم آسانی سے ہو سکتی ہے۔  
 مان لو کہ

$$۱ = (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰)$$

$$۱ = (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰)$$

جہاں نامعلوم سروں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ه'، 'و' کی قیمتیں اس طرح مقرر کرنا ہے کہ جب 'ت' بتدریج ۱، ۲، ۳، ۴ ہو جائے تو ما علی الترتیب قیمتیں

'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ه'، 'و' اختیار کرے۔

پس درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۱ = ۱$$

$$۱ = ۱ + ۱$$

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱$$

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

$$_p J_{2n} + {}_p J_{2n} + {}_p J_{12} + {}_p J_{12} + {}_p J_{12} = {}_p J_{66}$$

اس لیے

6 = 9

$$b + b = j$$

$$(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(1 - 1 + 1 - 1) \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$(.6 + .6r - .6r^2 + .6r^3 - .6r^4) \frac{1}{r^4} = .6$$

اس طرح بینی اور اج کا عام ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$${}_3P \frac{(2-1)(1-1)1}{3 \times 2 \times 1} + {}_2P \frac{(1-1)1}{2 \times 1} + {}_1P 1 + 1 = 6$$

$$(r) \dots \dots \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{2 \times 3 \times 2 \times 1} +$$

جہاں ط، ط، ط، ط، متواتر فرقوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

بالعموم آخری رقم نظر انداز کی جاسکتی ہے کیونکہ جملہ

$$b + \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi$$

عام طور پر بہت چھوٹا ہوگا۔ اگر ہم اسے صفر کے مساوی رکھیں تو

$$(r^b + .b) \frac{1}{q} - (\mu^b + .b) \frac{2}{p} = r^b$$

جدولوں میں درج شدہ مقداریں بلاشبہ عام طور پر ایک حد تک

(۴) غلط ہوتی ہیں، یہ غلطی اعشاریہ کے آخری مقام میں نصف ہندسہ تک ہو سکتی ہے۔ اگر ما، اور ملہ ہر ایک آخری مقام میں بقدر نصف ہندسہ کے زیادہ بڑا ہو اور با اور ماہ ہر ایک آخری مقام میں بقدر اسی مقدار کے کم ہو تو

ان ناموافق ترین حالات میں بھی ماہ کی قیمت کے اعشاریہ کے آخری مقام میں صرف ایک واحد ہندسہ کی غلط واقع ہو سکتی ہے۔  
نیز اسی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ماہ} = ۴ - \text{ماہ} - ۶ + \text{ماہ} + ۴ - \text{ماہ}$$

جس سے بظاہر یہ معلوم ہوتا ہے کہ ماہ، ماہ، ماہ، ماہ معلوم ہونے کے بعد ماہ کو محسوب کیا جاسکتا ہے۔ لیکن یہ ورائی ادراج (Extrapolation) ٹھیک نہیں ہوگا کیونکہ اگر ماہ اور ماہ ہر ایک بقدر نصف ہندسہ کے زیادہ بڑا ہو اور ماہ اور ماہ ہر ایک بقدر نصف ہندسہ کے کم ہو اور ایسا ہونا بہت ممکن ہے تو ماہ کی قیمت کے آخری مقام میں مجموعی غلطی یا ہندسوں تک ہوگی۔

بینی ادراج کا حسب ذیل طریقہ بھی جو بیسل (Bessel) سے منسوب ہے قابل یادداشت ہے۔

فرض کرو کہ ت وہ دلیل ہے جو دو جدولی دلیلوں کے درمیان وسطی نقطہ سے ناپی گئی ہے، جدول کے اس حصہ کو مبداء کی ہر ایک جانب دو جدولی دلیلوں تک لکھ لو۔

فرق اول      فرق دوم      فرق سوم

		ماہ
	ماہ - ماہ	ماہ
ماہ - ماہ + ماہ	ماہ	ماہ
ماہ - ماہ + ماہ + ماہ - ماہ	ماہ - ماہ	ماہ
ماہ - ماہ + ماہ	ماہ - ماہ	ماہ
	ماہ - ماہ	ماہ

دیکھو  $1 = \frac{1}{3} (\text{ماہ} + \text{ماہ})$  ،  $\text{ب} = \text{ماہ} - \text{ماہ}$  ،



ج =  $\frac{1}{4}$  (ماہ - ماہ - ماہ + ماہ) ، د = ماہ - ۳ ماہ + ۳ ماہ - ماہ  
 جہاں ا، ب، ج، د وہ مقداریں ہیں جو یا تو مبداء میں سے گزرنے والے  
 انعتی خط پر واقع ہیں یا اس خط کی مخالف سمتوں پر دو متضاد متعادل روں کے  
 درمیان حسابی اوسط ہیں۔  
 ہم لکھ سکتے ہیں

$$ما = \frac{1}{4} ما + (ت + \frac{1}{4}) (\frac{1}{4} - ت) (\frac{3}{4} - ت)$$

$$+ \frac{1}{4} ما + (ت + \frac{3}{4}) (\frac{1}{4} - ت) (\frac{3}{4} - ت) - \frac{1}{4} ما + (ت + \frac{3}{4}) (\frac{1}{4} + ت) (\frac{3}{4} - ت)$$

$$+ \frac{1}{4} ما + (ت + \frac{3}{4}) (\frac{1}{4} + ت) (\frac{1}{4} - ت)$$

کیونکہ صریحات کی بجائے علی الترتیب -  $\frac{3}{4}$ ،  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{3}{4}$  درج کرنے  
 سے ا، ما، ما، ما، حاصل ہوتے ہیں اور ہم یہ مان لیتے ہیں کہ ت کی قریبی  
 قیمتوں کے لیے اسی جملہ سے ما کی متناظر قیمتیں حاصل ہوں گی۔  
 پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

(۲۲)

$$۴۸ ما = (۸ ت - ۱۲ ت + ۲ ت - ۳) +$$

$$۳ ما + (۸ ت - ۴ ت - ۱۸ ت + ۹) +$$

$$- ۳ ما + (۸ ت + ۴ ت - ۱۸ ت - ۹) +$$

$$+ ما + (۸ ت + ۱۲ ت - ۲ ت - ۳)$$

اور اس لیے

$$۴۸ ما = (۸ ت - ۱۲ ت + ۲ ت - ۳) + (۳ ت - ۱۲ ت + ۲ ت - ۳) +$$

$$+ (۵۴ ت - ۲۴ ت + ۳ ت) + (۵۴ ت - ۲۴ ت + ۳ ت) +$$





ہیئت اور اراج کا ضابطہ اس اساسی ضابطہ

$$= با + با + \frac{ت}{۲} (با - با) + \frac{ت(ت-۲)}{۲} (با - با + ۲ + با)$$

میں تو یہ ہوگا اگر وقت کو ت سے محسوب جائے۔  
مثال ۶۔ ایفیمرس سے حسب ذیل اندراجات لئے گئے ہیں:-

### گرنیوچ اوسط دوپہر

سورج کا شمالی میل ۱۹۰۵ء

۲۰ ۶ ۲۹۶۹ اپریل ۷ء

۲۲ ۶ ۲۲۶۲ ~ ۸ء

۲۵ ۶ ۲۴۶۴ ~ ۹ء

ثابت کرو کہ سورج کا میل بتاریخ ۷ء اپریل ۱۹۰۵ء بوقت ۶ ب۔ ظ  
(بعد ظہر) ۶ ۲۶ ۲۸۶۴ ہے۔

مثال ۷۔ چاند کا نیم قطر حسب ذیل ہے:-

### گرنیوچ اوسط دوپہر

چاند کا نیم قطر ۱۹۰۹ء

۱۶ ۴ ۲۹۶۲ ستمبر ۳ء

۱۶ ۴ ۱۸۶۶ ~ ۴ء

۱۶ ۵ ۵۶۹۴ ~ ۵ء

۱۵ ۶ ۵۲۶۶۹ ~ ۶ء

ثابت کرو کہ چاند کا نیم قطر بتاریخ ۳ ستمبر ۱۹۰۹ء بوقت نیم شب  
۱۶ ۴ ۲۸۶۴ ہے۔

(۲۴)

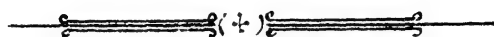
۷ ب۔ ظ معادل ہے p.m. کا۔



ثابت کرو کہ چاند کا ص - م بتاریخ ۲۱ دسمبر ۱۹۰۵ء بوقت  $(۱۸ + ۱۱۲)$  گھنٹہ  
یہ تھا

$$۱۴ \text{ گ } ۲۱ \text{ م } ۹ - ۳۵ \text{ ش } + (۲۸ \text{ م } ۱۰ - ۶ \text{ ش}) ۱۱$$

$$+ ۳۸۶ \text{ ش } (۱ - ۱۲) (۱ + ۱۲)$$



## دوسرا باب

### کروی محدودوں کا استعمال

- صفحہ
- ۳۸ ۶ - کُرہ پر درجہ دار بڑے دائرے -
- ۴۰ ۷ - کُرہ پر کے کسی نقطہ کے محدود -
- ۸ - دونوں نقطوں کو ملانے والی قوس کی جیب تمام کو ان نقطوں کے محدودوں میں بیان کرنا -
- ۴۲ ۹ - کروی محدودوں میں دی ہوئی مساوات کا مفہوم -
- ۴۶ ۱۰ - دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان ان کے شطیبوں کو ملانے والی اُس قوس کے مساوی ہوتا ہے جو ۸۰ سے بڑی نہ ہو -
- ۴۹ ۱۱ - دو درجہ دار بڑے دائروں کا تقاطع -
- ۵۱ ۱۲ - محدودوں کا استعمال -
- ۵۵ ۱۳ - لوکارتموں کا استعمال -
- ۶۳

۶ - کُرہ پر درجہ دار بڑے دائرے -

کسی بڑے دائرہ کے محیط کو تقسیم کرنے والے نشانوں کے ذریعہ ۳۶۰ مساوی حصوں میں منقسم فرض کیا جاتا ہے۔ ان میں سے ایک نشان سے ابتدا کر کے جسے منفری لیتے ہیں، باقاعدہ ترتیب میں آنے والے متواتر نشانوں

۱° ۲' ۳' ..... ۳۵۹° کہلاتے ہیں۔ اس کے بعد کا نشان صفر ہے، پس یہ نقطہ صفر یا ۳۶۰° کہلاتا ہے۔ اس طرح ایک درجہ دار بڑا دائرہ حاصل ہوتا ہے، اس میں ہر درجہ کے وقفہ کو حسب ضرورت فریقوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

صفر سے ابتدا کرنے میں اعداد کسی ایک سمت میں بڑھ سکتے ہیں اور اس طرح ایک ہی دائرہ کی درجہ بندی ایک ہی صفر نشان سے دو بالکل جدا گانہ طریقوں سے عمل میں آسکتی ہے۔

فرض کرو کہ ایک شخص کرہ کے بیرونی جانب ایک درجہ دار بڑے دائرہ پر اس سمت میں چلتا ہے جس میں اعداد بڑھتے ہیں یعنی صفر درجہ سے ایک درجہ کی سمت میں نہ کہ صفر سے ۳۵۹ کی سمت میں۔ تب اس شخص کے بائیں ہاتھ کی طرف بڑے دائرہ کا وہ قطب ہوگا جسے ہم لفظ شطب (Nole) سے موسوم کر سکتے ہیں اور دائیں ہاتھ کی طرف وہ قطب ہوگا جسے ہم لفظ ضد شطب (Antinole) سے موسوم کر سکتے ہیں۔

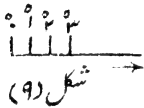
(۲۶) اس طرح اگر ہم ارضی خط استوا کو ایک درجہ دار بڑے دائرے کے طور پر تصور کریں جس کی تقسیم گرینوچ یا پیرس سے مشرقی جانب طول بلدوں کے لیے عمل میں آئی ہو تو زمین کا شمالی قطب اس درجہ دار بڑے دائرہ کا شطب ہے اور زمین کا جنوبی قطب دائرہ کا ضد شطب ہے۔ برخلاف اس کے اگر خط استوا کی درجہ بندی اس طرح عمل میں آئی کہ اس پر مغربی جانب چلنے سے طول بلد بڑھتے تو ایسے دائرہ کا شطب زمین کا جنوبی قطب ہوتا اور اس کا ضد شطب زمین کا شمالی قطب۔

جب کرہ پر کے کسی نقطہ کو ایک درجہ دار بڑے دائرہ کے شطب کے طور پر بیان کیا جاتا ہے تو اس سے نہ صرف اس بڑے دائرہ کا محل متعین ہوتا ہے بلکہ اس پر کی وہ سمت بھی جس میں درجہ بندی عمل میں آئی ہے۔ اگر دائرے ہوئے نقطہ کو اس درجہ دار بڑے دائرہ کے ضد شطب کے طور پر ظاہر کیا جاتا تو درجہ بندی کی سمت الٹ جاتی کیونکہ تعریف کی رو سے ضد شطب



اُس شخص کے دائیں ہاتھ کی جانب ہوتا ہے جو اس بڑے دائرہ پر بڑھتے درجہ سمت میں چلتا ہے۔

کسی درجہ دار بڑے دائرہ پر صفر سے ۹ کی سمت ظاہر کرنے کے لیے



دائرہ پر ایک تیر کا نشان دیدینا کافی ہے جیسا کہ شکل ۹ اور شکل

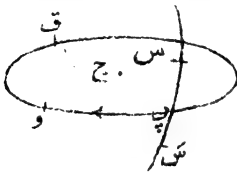
۱۰ میں دکھایا گیا ہے۔ بڑھتے

درجوں کی سمت کو مثبت سمت

کہنا اور گھٹتے درجوں کی سمت کو منفی سمت کہنا سہولت بخش ہوگا۔

۷۔ کرہ پر کسی نقطہ کے محدود

کسی بڑے دائرہ کو جس کی درجہ بندی مبداء و پرہ سے ہوئی ہو تو اگر بڑا دائرہ منتخب کر دے تب ہم کرہ پر کے کسی نقطہ کے محل کو دو محدودوں سے اور ضہ کی مدد سے جو اس بڑے دائرہ کے لحاظ سے لگے ہوں بیان کر سکتے ہیں۔



اگر ضہ اور ضہ کو خاص قیمتیں دی گئی ہوں تو کرہ پر کا تناظر

نقطہ میں حسب ذیل طریقہ سے

معلوم کیا جاتا ہے۔ مبداء و

بڑھتے درجوں کی سمت میں بڑے

دائرہ پر نقطہ پ ایسا لو کہ

و پ = ع۔ نقطہ پ پر ایک بڑا دائرہ کھینچو جو و پ پر عمود ہو۔

اب اس دائرہ پر ایک قوس لینی ہے جو ضہ کے مساوی ہو۔ اگر ضہ

مثبت ہو تو مطلوبہ نقطہ میں کو اس نیم کرہ میں لینا چاہئے جس میں شطب واقع ہے۔ لیکن اگر ضہ منفی ہو تو مطلوبہ نقطہ میں کو اس نیم کرہ میں

لینا چاہئے جس میں ضد شطب واقع ہے۔ پس جب 'ع اور ضہ

دئے جاتے ہیں تو کرہ پر نقطہ کا محل تحیک طور پر معلوم ہو جاتا ہے۔ بالعموم

(۲۷)

سہولت اس میں ہے کہ اُس نیم کرہ کو جس میں شطب واقع ہوتا ہے مثبت نیم کرہ کہا جائے اور دوسرے کو جس میں ضد شطب واقع ہوتا ہے منفی نیم کرہ کہا جائے۔  
عہ کی منفی قیمتوں پر غور کرنے کی ضرورت نہیں کیونکہ اگر نقطہ ق کو  $90^\circ$  کے طور پر بیان کیا گیا ہو جبکہ زاویہ  $90^\circ$  ج ق  $= 90^\circ$  تو اس نقطہ ق کو  $90^\circ + 90^\circ$  سے ظاہر کرنے میں بالعموم زیادہ سہولت ہوگی جہاں اسے مثبت سمت میں ناپا گیا ہے۔ پس ہم یہ قرار داد اختیار کرتے ہیں کہ عہ کی تمام قیمتیں  $90^\circ$  اور  $90^\circ$  کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

نیز ضدہ کی قیمتوں کو  $90^\circ$  اور  $90^\circ$  کے درمیان مفید کرنا سہولت بخش ہے کیونکہ اس سے کچھ ابہام رفع ہوتا ہے اور کارل عمومیت بھی برقرار رہتی ہے۔ بلاشبہ محدود ہمیشہ ایک نقطہ کی تعین کریں گے لیکن ضدہ کی اس قید کے بغیر نتیجہ نہیں نکلے گا کہ ایک نقطہ کے محدودوں کا صرف ایک واحد ممکن زوج ہیں۔ مثلاً عہ  $= 30^\circ$  ضدہ  $= 20^\circ$  سے وہ نقطہ ظاہر ہوگا جو نقطہ عہ  $= 10^\circ$  ضدہ  $= 10^\circ$  سے مختلف نہیں ہوگا لیکن اگر ہم یہ قرار دے لیں کہ ضدہ  $= 90^\circ$  اور  $90^\circ$  کے باہر واقع نہیں ہوتا تو اس سے نہ صرف یہ لازم آئے گا کہ محدودوں کے ایک زوج سے ایک نقطہ متعین ہوتا ہے بلکہ یہ بھی کہ ایک نقطہ بالعموم محدودوں کا صرف ایک زوج رکھتا ہے۔ عرف مستثنیٰ صورتیں اساسی دائرہ کے شطب اور ضد شطب ہیں کیونکہ شطب میں ضدہ  $= 90^\circ$  اور ضد شطب میں ضدہ  $= 90^\circ$  اور ہر صورت میں عہ غیر متعین ہے۔

مثال ۱۔ ان قیود کو ترک کر کے کہ  $90^\circ$  عہ  $90^\circ$  اور  $90^\circ$  ضدہ  $90^\circ$  ثابت کر کے کہ نقطہ عہ  $= 90^\circ$  ضدہ  $= 90^\circ$  کو حسب ذیل محدودوں میں سے کسی ایک سے بھی برابر تعبیر کیا جاسکتا ہے:

$$(90^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 90^\circ)$$

$$(90^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 90^\circ)$$

ہم نقطہ کے محل کو بدلے بغیر اس کے محدودوں میں سے کسی ایک یا دونوں میں  $90^\circ \pm 90^\circ$  ہمیشہ جمع کر سکتے ہیں۔

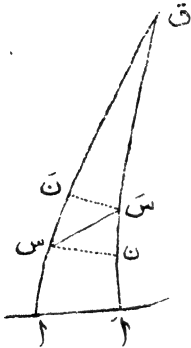
مثال ۲۔ ثابت کرو کہ محدودوں کے مسب ذیل جوڑے

$$\begin{aligned} & \text{ع} ، \text{ضہ} ؛ \\ & ۳۶۰ + \text{عہ} ، \text{ضہ} ؛ \\ & ۱۸۰ + \text{عہ} ، ۹۰ - \text{ضہ} ؛ \\ & ۱۸۰ + \text{عہ} ، ۱۸۰ - \text{ضہ} ؛ \end{aligned}$$

کے مسب ایک ہی نقطہ کو ظاہر کرتے ہیں اور اس لئے اس امر کی تصدیق کرو کہ کرہ پر ہر نقطہ کے لیے محدودوں کا ایک جوڑا ایسا معلوم کیا جاسکتا ہے کہ

$$۰ \text{ عہ } ۳۶۰ \text{ اور } ۹۰ - \text{ضہ } ۹۰$$

۸۔ دو نقطوں کو ملانے والی قوس کی جیب التمام کو ان (۲۸)  
نقطوں کے محدودوں میں بیان کرنا۔



شکل (۱۱)

فرض کرو کہ  $\angle$  (ا) سوال کے  
بڑا دائرہ ہے اور ق اس کا  
شطب ہے۔ فرض کرو کہ دے  
ہوئے نقطے س اور س ہیں۔  
چونکہ اس = ضہ ، اس لیے  
س ق = ۹۰۔ ضہ اور اسی طرح  
س ق = ۹۰۔ ضہ۔ نیز  
ا = عہ۔ اور چونکہ ق ا  
اور ق ا میں سے ہر ایک  
۹۰ ہے اس لیے

زاویہ س ق س = عہ۔ عہ

اب مثلث س ق س پر اساسی ضابطہ (۱) لگانے سے

جھ ط = جب ضہ جب ضہ + جھ ضہ جھ (عہ۔ عہ).... (ا)

جہاں طہ = سس -

اگر نقطے سس اور سس کرّو پر باہم نزدیک ہوں تو ان کے فاصلہ کی تعین کے لیے ایک زیادہ آسان ضابطہ اس طرح حاصل کیا جاتا ہے :-

جم طہ = جب ضہ جب ضہ + جم ضہ جم (عہ - عہ)

= جب ضہ جب ضہ {جم<sup>۲</sup> (عہ - عہ) + جب<sup>۲</sup> (عہ - عہ)}

+ جم ضہ جم ضہ {جم<sup>۲</sup> (عہ - عہ) - جب<sup>۲</sup> (عہ - عہ)}

= جم (ضہ - ضہ) جم<sup>۲</sup> (عہ - عہ) - جم (ضہ + ضہ) جب<sup>۲</sup> (عہ - عہ)

اس کو

میں سے تفریق کر دو تو

جب<sup>۲</sup> طہ = جم<sup>۲</sup> (عہ - عہ) جب<sup>۲</sup> (ضہ - ضہ) + جب<sup>۲</sup> (عہ - عہ) جم<sup>۲</sup> (ضہ + ضہ)

یہ بلاشبہ عام طور پر درست ہے اور اگر طہ بہت چھوٹا ہو تو اس سے تقریبی حل

طہ = (ضہ - ضہ) + (عہ - عہ) جم<sup>۲</sup> (ضہ + ضہ)

حاصل ہوتا ہے -

ہم اس ضابطہ کو ہندسی طور پر اس طرح ثابت کر سکتے ہیں (شکل ۱۱) :-

فرض کر دو کہ سس ن اور سس ن علی الترتیب سس ق اور

سس ق پر عمود ہیں۔ چونکہ سس ن سس ایک بہت چھوٹا مثلث ہے اسلئے

سس ن<sup>۱</sup> + ن سس<sup>۲</sup> = سس سس<sup>۲</sup>

پس تقریباً

(ضہ - ضہ) + (عہ - عہ) جم<sup>۲</sup> ضہ = سس سس<sup>۲</sup>

اسی طرح مثلث سس ن سس سے

(ضہ - ضہ) + (عہ - عہ) = جم ضہ = سس سس  
 سس کی ان دو تقریبی قیمتوں میں صرف یہ فرق ہے کہ ایک میں جم ضہ  
 آتا ہے اور دوسرے میں جم ضہ - عام طور پر ایک جیب التمام بہت بڑی  
 اور دوسری بہت چھوٹی ہوتی ہے اور اس لیے تقرب کے لیے جم ضہ  
 اور جم ضہ کی بجائے ہم ان کا اوسط لکھ سکتے ہیں جو اس طرح معلوم کیا جاتا ہے

$$\frac{1}{4} (\text{جم ضہ} + \text{جم ضہ}) = \text{جم} \left( \frac{\text{ضہ} + \text{ضہ}}{4} \right) (\text{ضہ} - \text{ضہ})$$

$$= \text{جم} \left( \frac{\text{ضہ} + \text{ضہ}}{4} \right)$$

اور اس کے اندراج سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے -

**قائم محدود -** فرض کرو کہ نیم قطر کے کرہ پر ایک نقطہ عہ ضہ

ہے - ہم (ا) سے نقطہ (عہ ضہ) کے قائم محدود ان محوروں کے حوالے سے  
 معلوم کر سکتے ہیں جن کی تعریف حسب ذیل ہے :-

$$+ \text{لا کرہ کے مرکز سے نقطہ عہ} = \text{ضہ} = \text{تک ہے}$$

$$+ \text{ما} \quad \text{عہ} = 90^\circ = \text{ضہ}$$

$$+ \text{ی} \quad \text{ضہ} = 90^\circ$$

پس ہم (ا) میں اندراج کرنے سے دیکھتے ہیں کہ ان قوسوں کی جو تالیف  
 جوق سے ان میں مثبت محوروں کے میروں تک پہنچی گئی ہیں علی الترتیب  
 یہ ہیں

جم عہ جم ضہ ، جب عہ جم ضہ ، جب ضہ

اور اس لیے قائم محدود

$$لا = \text{رجع عہ جم ضہ} ، ما = \text{رجع عہ جم ضہ} ، ی = \text{رجع ضہ} \text{ ہیں -}$$

مثال ۱ - میں اور میں کے درمیان فاصلہ طہ معلوم کرو جبکہ یہ دیالیا

$$\text{ہو کہ ضہ} = 12^\circ 25' ، \text{ضہ} = 15^\circ 10' ، \text{عہ} = 22^\circ 38' ، \text{عہ} = 21^\circ 38'$$

ہم فاصلہ طہ کو راست ضابطہ (ا) سے معلوم کرتے ہیں

$$\begin{array}{r}
 \text{جب ضہ } ۹۶۱۳۰۳۱ \text{ جم ضہ } ۹۵۹۸۴۴ \\
 \text{جب ضہ } ۹۶۳۳۲۳۲۷ \text{ جم ضہ } ۹۵۹۸۹۰۲۸ \\
 \text{جم (عہ - عہ) } ۹۵۸۶۶۶۲۳ \\
 \hline
 ۸۶۹۴۶۰۶۵ \\
 \hline
 ۹۶۸۱۶۱۹۵
 \end{array}$$

پس

پہلی رقم ۰۶۰۸۸۳۲۱  
دوسری رقم ۰۶۶۵۴۹۳۰

جم طہ ۰۶۰۴۳۲۵۱

$$\text{طہ} = ۲۰۵۹۲۱$$

مثال ۲۔ اگر ضہ =  $۲۰۵۹۲۱$  ، ضہ =  $۲۰۵۹۲۱$  اور عہ =  $۲۰۵۹۲۱$  تو بتاؤ کہ طہ =  $۲۰۵۹۲۱$

مثال ۳۔ دو ستاروں کے محدود علی الترتیب عہ ، ضہ اور عہ ، ضہ ہیں۔ (آ) سے ثابت کرو کہ ان کو ملانے والے بڑے دائرے کے قطبوں کے محدود (عہ ، ضہ) مساواتوں

$$\text{مس ضہ} = \text{نم ضہ جم} (\text{عہ} - \text{عہ}) = \text{نم ضہ جم} (\text{عہ} - \text{عہ})$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ ان مساواتوں کو ہندسی طور پر بھی حاصل کرو۔  
مثال ۴۔ سمجھاؤ کہ مثال ۳ کے حل کا اطلاق کس طرح دونوں قطبوں (۳۰)

پر ہوتا ہے اور بتاؤ کہ شطب کو چند شطب سے کس طرح نمیز کیا جاسکتا ہے اگر مثبت سمت پہلے ستارے سے دوسرے ستارے کی سمت ہو۔

مثال ۵۔ اگر لی ، ایک بڑے دائرے کی اس قوس کا طول ہو جو زمین پر (جسے نصف قطر کا ایک کرہ فرض کیا گیا ہے) عرض بلد لہ طول بلد لہ سے عرض بلد لہ تک لی گئی ہو تو ثابت کرو کہ لی = سر جم (جب لہ جب لہ قط افہ)



ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر عہ اور ضہ دے گئے ہوں تو ایک نقطہ کے محدود یہ مقداریں ہوں کرہ پر پوری طرح متعین ہو جاتا ہے۔ اگر ہمیں عہ اور ضہ کے متعلق سوائے اس کے کچھ معلوم نہ ہو کہ وہ ایک مساوات کو پورا کرتے ہیں جس میں وہ دوسری مقداروں کے ساتھ جو معلومہ فرض کی جاتی ہیں داخل ہوتے ہیں تو ایسی صورت میں ان دو مجموعہ مقداروں کو متعین کرنے کے لیے کافی مفروضات موجود نہیں ہوتے۔

عہ کی کوئی قیمت اس مساوات میں مندرج کی جائے تو ضہ میں ایک مساوات حاصل ہوگی جس کی بالعموم ایک یا زیادہ اصلیں معلوم ہو سکیں گی۔ عہ کی مختلف متعدد قیمتیں لیکر اس عمل کو دہرانے سے محدودوں عہ، ضہ کے جوڑوں کا ایک ختم نہ ہونے والا سلسلہ حاصل ہوگا۔ ان میں سے ہر جوڑے سے کرہ پر ایک نقطہ متعین ہوگا۔ اگر ان میں سے متعدد نقطوں کو کرہ پر رسم کیا جائے تو ان سے ایک منحنی ظاہر ہوگا جس کو کردی سطح پر رسم کیا جاسکے گا۔ اب ابتدائی مساوات کو اس منحنی کی مساوات کے طور پر ٹھیک اسی طرح (۳۱) تصور کیا جاسکتا ہے جس طرح لا اور ما میں کوئی مساوات علم ہندسہ تحلیلی میں مستوی منحنی کو تعبیر کرتی ہے۔

ہم اول یہ بتائیں گے کہ اگر نقطہ عہ، ضہ کے محدود مساوات

(ج ب + ب جب عہ جم ضہ + ج جم عہ جم ضہ =

کو پورا کریں جہاں (ا، ب، ج) مستقل ہیں تو اس نقطہ کا طریق ایک بڑا دائرہ ہے جس کے قطبوں کے محدود عہ، ضہ اور ۱۸۰ + عہ، ضہ ہیں جہاں

$$\text{مس عہ} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ج}}, \text{ جب ضہ} = \frac{۱}{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}}$$

ہم ان کو مثبت لے سکتے ہیں کیونکہ اگر ضرورت پڑے تو تمام رقموں کی علامتیں بدلی جاسکتی ہیں۔ تین نئی مقداریں عہ، ضہ ایسی لو کہ



۱ = ھ جب ضہ = ب = ھ جب عہ جم ضہ = ج = ھ جم عہ جم ضہ  
 تو مربع لینے اور جمع کرنے سے ھ = ± (۱ + ب + ج + ۲ - اس  
 جذر المربع کی علامت مثبت لی جائے تو ہمیں پہلی مساوات سے حاصل ہوتا  
 ہے جب ضہ = مثبت مقدار جو ۱، اس لیے ضہ مثبت ہے اور  
 چونکہ ضہ ۹۰، اس لیے ضہ اور ۱۸۰۔ ضہ کے درمیان کوئی ابہام  
 نہیں ہے۔ دوسری اور تیسری مساواتوں سے جم عہ اور جب عہ  
 ملتے ہیں اور اس لیے عہ بغیر کسی ابہام کے معلوم ہوتا ہے اور اس طرح  
 ہمیں ایک حل عہ، ضہ حاصل ہوتا ہے۔ لیکن اگر ہم نے ھ کی منفی  
 قیمت لی ہو تو پہلی مساوات سے ضہ کی بجائے۔ ضہ ملتا اور آخری دو مساوات  
 عہ کی بجائے صرف ۱۸۰ + عہ رکھنے سے پوری ہو سکتی ہیں۔ اس لیے دو حل  
 عہ، ضہ اور ۱۸۰ + عہ، ضہ ہیں اور یہ نقطے متقاطر نقطے ہیں۔ اب ابتدائی  
 مساوات ہو جاتی ہے

$$ھ \{ \text{جب ضہ جب ضہ} + \text{جم ضہ جم ضہ} (عہ - عہ) \} = ۰$$

اس لیے نقطہ عہ، ضہ ثابت نقطہ عہ، ضہ سے ۹۰ پر ہونا چاہئے اور  
 اس لیے نقطہ عہ، ضہ کا طریق ایک بڑا دائرہ ہے۔  
 مثال ۱۔ اگر مساوات

۱ جب ضہ + ب جب عہ جم ضہ + ج جم عہ جم ضہ = ۵  
 پوری ہو تو نقطہ عہ، ضہ کا طریق بالعموم ایک چھوٹا دائرہ ہوگا جس کا نصف قطر

$$\text{جم} \{ ۵ \} \{ ۱ + ب + ج + ۲ \} = ۱$$

ہوگا نیز ثابت کرو کہ اگر ۵ = ۱ + ب + ج + ۲ تو مساوات بالا صرف ایک  
 نقطہ کو تعبیر کرتی ہے۔

مثال ۲۔ اگر کرہ پر ایک نقطہ کے رواں محدود عہ، ضہ ہوں اور

۱۔ ب مستقل ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

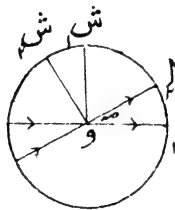
مس ضہ = مس ب جب (ع-د)

ایک بڑے دائرہ کو تغیر کرتی ہے جس کا ایک قطب نقطہ عہ = د + ۲۰۰ = ۲۰۰ ہے۔  
۹۰۔ ب ہے۔

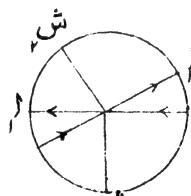
۱۰۔ دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان ان کے شیطوں (۳۲)  
کو ملانے والی اس قوس کے مساوی ہوتا ہے جو ۱۸۰°  
سے بڑی نہ ہو۔

دو غیر درجہ دار بڑے دائروں کا میلان بالعموم ناگزیر طور پر مبہم  
ہوتا ہے کیونکہ یہ میلان دو تکمیلی زاویوں میں سے کوئی ایک ہو سکتا ہے  
اور یہ ابہام صرف اس صورت میں رفع ہوتا ہے جبکہ یہ دائرے ایک دوسرے  
کو علی انقوائم قطع کریں۔

لیکن دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان ضرور نہیں کہ مبہم ہو کیونکہ ہم  
دو تکمیلی زاویوں میں سے ہمیشہ اس زاویہ کو معلوم کر سکتے ہیں جسے ان دو دائروں کا  
میلان خیال کیا جاتا ہے۔ دو بڑے دائروں کے میلان کی یہ تعریف ہے کہ



شکل (۱۳)



شکل (۱۴)

یہ وہ زاویہ ہے ۱۸۰° ہے جو ان دائروں کے ان حصوں کے درمیان ہوتا ہے



ہوتا ہے اس قرارداد سے رفع کر سکے ہیں کہ دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان کبھی بھی ۹۰° سے متجاوز نہ ہوتا چاہئے۔

**مثال ۱**۔ اگر تین درجہ دار بڑے دائروں پر ب ج ج ا ب ثابت سمتیں ہوں اور ان سے مثلث ا ب ج بنے اور اگر ان کے شطب علی الترتیب ا ب ج ہوں تو ثابت کرو کہ (۱) اگر قطبی مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر ب ج ج ا ب ج ا ب ثابت سمتیں ہوں تو ان ضلعوں کے شطب علی الترتیب ا ب ج ہیں۔

(ب) مثلث ا ب ج کے ضلع اور زاویے مثلث ا ب ج کے زاویوں اور ضلعوں کے علی الترتیب تکملہ ہیں۔

**مثال ۲**۔ دو درجہ دار دائروں کے شطب عم عم اور عم عم ہیں۔ اگر ان دائروں کا میلان ص ہو تو ثابت کرو کہ

جم ص = جب ص جب ص + جم ص جم ص (عم - عم)  
اور اگر ان دو دائروں کے نقطہ تقاطع کے عدد عم عم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب ص} = \pm \frac{\text{جم ص جم ص جب ص جب ص (عم - عم)}}{\text{جب ص}}$$

$$\text{جم ص جم ص} = \pm \frac{\text{جم ص جب ص جب ص عم - جب ص جم ص جب ص عم}}{\text{جب ص}}$$

$$\text{جم ص جب ص} = \pm \frac{\text{جب ص جم ص جم ص عم + جب ص جم ص جم ص عم}}{\text{جب ص}}$$

جہاں اوپر کی اور نیچے کی علامتیں بالترتیب دو تقاطعوں کے متناظر ہیں۔

**۱۱۔ دو درجہ دار بڑے دائروں کا تقاطع۔**

فرض کرو کہ ج اور ج (شکل ۱۵) دو درجہ دار بڑے دائرے ہیں جو دو متقاطع نقطوں ط اور ط پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ج کا شطب مش ہے اور ج کا شطب مش -  
 کوئی نقطہ جو ج پر مثبت سمت میں حرکت کرتا ہے نقطہ ط پر  
 آکر اس مثبت سمت نیم کرہ کے اندر داخل ہوتا ہے جو ج سے محدود ہے -  
 اس لیے ہم کہتے ہیں کہ ط 'ج کے لحاظ سے ج کا صعودی عقدہ ہے -  
 کوئی نقطہ جو ج پر مثبت سمت میں حرکت کرتا ہے ط پر آکر اس منفی  
 نیم کرہ میں داخل ہوتا ہے جو ج سے محدود ہے - اس لیے ہم کہتے ہیں کہ  
 ط 'ج کے لحاظ سے ج کا نزولی عقدہ ہے - (۳۴)

اگر ج پر دو مبدا ہو جہاں سے محدودوں کی پیمائش ہوئی ہے اور  
 اگر و پ = ع، پ مش = ضہ تو ج کے لحاظ سے مش کے محدود  
 جو ج کا شطب ہے عہ اور ضہ ہیں -

اب چونکہ دفعہ ۱۰ کی رو سے دو درجہ دار بڑے دائروں کا درمیانی  
 زاویہ ان کے شطبوں کی درمیانی قوس ہوتی ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ج اور ج  
 کا درمیانی زاویہ یا میلان ۹۰ - ضہ ہے - پس

$$\text{وط} = \text{وپ} + \text{پط} = \text{عہ} + ۹۰$$

$$\text{وط} = \text{و ط} + ۱۸۰ = \text{عہ} + ۲۷۰$$

اور اس لیے حسب ذیل عام بیان حاصل ہوتا ہے -  
 اگر ایک درجہ دار بڑے دائرہ ج کے شطب کے محدود 'لحظہ دوسرے  
 بڑے دائرہ ج کے 'عہ، ضہ ہوں تو

ان دائروں کا میلان ۹۰ - ضہ ہے

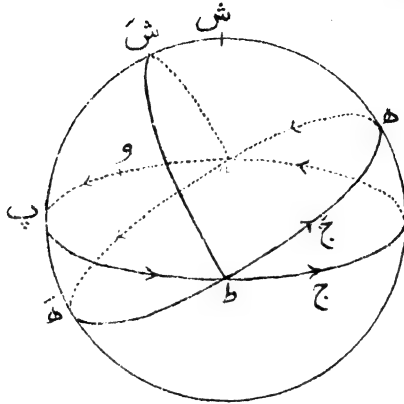
ج پر ج کے صعودی عقدہ کے محدود ۹۰ + عہ، ہیں

اور ج پر ج کے نزولی عقدہ کے محدود ۲۷۰ + عہ، ہیں -

اگر ج پر ج کے صعودی عقدہ کے محدود (قہ) لیے جائیں جس سے

اکثر سہولت پیدا ہوتی ہے اور اگر صہ کو ان دائروں کا میلان قرار  
 دیا جائے تو ج کے شطب کے محدود (قہ ۲۷۰ + ۹۰ - صہ) حاصل

ہو تے ہیں جبکہ ج حوالہ کا دائرہ ہو۔



شکل (۱۵)

(۳۵) عام طور پر ایک بڑے دائرہ کے لحاظ سے دوسرے بڑے دائرہ کا محل اور اس کی درجہ بندی کی سمت مقرر کرنے کے لیے اس دوسرے دائرہ کے تین مبدل بلحاظ پہلے دائرہ کے معلوم ہونے چاہئیں۔ مثلاً دوسرے بڑے دائرے کے شطب کے دو محدودے جا سکتے ہیں کیونکہ اس سے شطب کا محل متعین ہوتا ہے اور پھر نہ صرف وہ بڑا دائرہ متعین ہوتا ہے جس کا قطب یہ شطب ہے بلکہ وہ سمت بھی معلوم ہوتی ہے جس میں دوسرے بڑے دائرہ کی درجہ بندی ہوئی ہے۔ اگر آپس میں صرف اس بڑے دائرہ کے ایک قطب کے محدودے جاتے تو بلاشبہ بڑے دائرہ کا محل متعین ہو جاتا لیکن جب تک یہ معلوم نہ ہو کہ دیا ہوا قطب شطب ہے یا ضد شطب اس وقت تک درجہ بندی کی سمت معلوم نہیں کی جا سکتی۔ تیسرا مبدل اس دوسرے بڑے دائرہ پر درجہ بندی کے مبدل کو مقرر کرنے کے لیے مطلوب ہوتا ہے۔

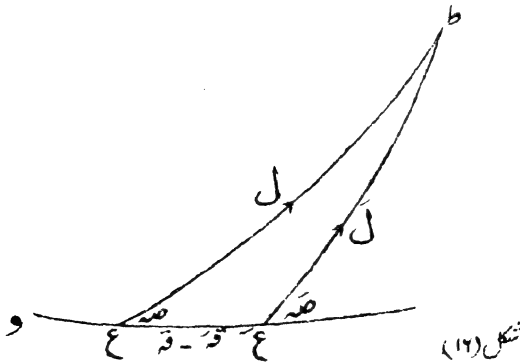
یاد دوسرے دائرہ کے صعودی عقدہ قہ کا محل پہلے دائرہ پر

اور نیز میلان سے دئے جا سکتے ہیں۔ پہلے دائرہ کے مبدا سے مثبت سمت میں چل کر ہم قہ دریافت کر لیتے ہیں اور اس طرح صعودی عقدہ معلوم ہو جاتا ہے۔ اس صعودی عقدہ پر دوسرا بڑا دائرہ پہلے دائرہ کے مثبت نیم کرہ میں داخل ہو رہا ہوگا۔ اگر ہم اس عقدہ سے دو متشع قوسیں کھینچیں جن کا درمیانی زاویہ صہ ہو تو مطلوبہ دائرہ کا ٹھیک مقام معلوم کرنے میں کوئی ابہام درپیش نہ ہوگا۔

**مثال ۱۔** ثابت کرو کہ ج کے لحاظ سے ج کا صعودی عقدہ ج کے لحاظ سے ج کا نزولی عقدہ ہے۔

**مثال ۲۔** شکل بنا کر یہ بتاؤ کہ ان دو درجہ دار بڑے دائروں کے درمیان کیا فرق ہے جن کے میلان حوالے کے بڑے دائرہ کے ساتھ مساوی ہیں اور جن کے صعودی عقدے مبدا سے فاصلوں طہ اور طہ + ۸۰ پر واقع ہیں

**مثال ۳۔** اگر ایک بڑے دائرہ ل کے صعودی عقدہ کا طول بلد قہ ہو اور اس کا میلان حوالے کے محور کے ساتھ صہ ہو اور اگر دوسرے بڑے دائرہ ل کی متناظر مقداریں قہ، صہ ہوں تو ل پر ل کے صعودی عقدہ ط کے محدود معلوم کرو۔ فرض کرو کہ حوالے کے دائرہ و ع ع (شکل ۱۶) پر عقدے ع ع ہیں تب ل پر ل کا صعودی عقدہ ط ہے۔ فرض کرو کہ فاصلہ ع ط لا ہے۔ اب لا کو صہ، صہ اور قہ۔ قہ کی رقوم میں معلوم کرتا ہے۔



دفعہ (۱) کے ضابطہ (۶) سے

مم لا جب (قہ - قہ) جم (قہ - قہ) جم صہ = جب صہ مم صہ  
اس لیے مم لا = جم (قہ - قہ) جم صہ - جب صہ مم صہ  
جب (قہ - قہ)

اب یہ معلوم کرنے کے لیے کہ لاک کی کوئی قیمت لی جائے ہم دیکھتے ہیں کہ

جب لا: جب (قہ - قہ) :: جب صہ: جب ط ہے  
اور ط اور صہ دونوں ۱۸۰ - اس لیے جب لا کی وہی علامت ہونی چاہیے  
جو جب (قہ - قہ) کی ہے اور اس سے یہ معلوم ہوگا کہ مطلوبہ زاویہ لاپے  
یا لا + ۱۸۰ - جب لا معلوم ہو جائے تو مساواتوں

(۳۶)

جب صہ = جب لا جب صہ

جم صہ جم (عہ - قہ) = جم لا

جم صہ جب (عہ - قہ) = جب لا جم صہ

سے ط کے محدود صہ (حوالے کے دائرہ کے لحاظ سے) معلوم ہوتے ہیں۔

مثال ۴ - پہلی مثال کے مفروضات کو لیکر ان دو بڑے دائروں کا

درمیانی میلان غہ معلوم کر دیجیں کی تعین علی الترتیب قہ صہ اور قہ صہ سے ہوتی ہے

ہم معلوم کر چکے ہیں کہ شعلوں کے محدود قہ + ۹۰، ۶۰ - صہ اور

قہ + ۹۰، ۶۰ - صہ ہیں اور اس لیے دفعہ ۱۰ مثال ۲ کی رو سے

جم غہ = جم صہ جم صہ + جب صہ جب صہ جم (قہ - قہ)

مثال ۵ - مقادیر (قہ صہ) اور (قہ صہ) سے مشخص ہونیوالے

دو بڑے دائروں کے مشترک عمود کا طول اگر لا ہو تو ثابت کرو کہ

جم لا = جم صہ جم صہ + جب صہ جب صہ جم (قہ - قہ)

۱۲ - محدودوں کا استحالہ -

فرض کرو کہ ایک نقطہ کے محدود بلحاظ ایک درجہ دار بڑے دائرے  
کے دے گئے ہیں تو اکثر اس امر کی ضرورت درپیش ہوتی ہے کہ اسی نقطہ کے



محدود بلحاظ دوسرے درجہ دار بڑے دائرہ کے معلوم کئے جائیں۔  
 فرض کرو کہ نقطہ پ کے ابتدائی محدود عہ ضہ ہیں اور نئے نظام میں  
 اسی نقطہ پ کے محدود عہ ضہ ہیں۔ فرض کرو کہ اسی طرح کسی اور نقطہ  
 پ کے ابتدائی محدود عہ ضہ اور تبدیل شدہ محدود عہ ضہ ہیں۔ اب  
 چونکہ اس احتمال سے فاصلہ پ پ متاثر نہیں ہو سکتا اس لیے یہ فاصلہ  
 دہی ہونا چاہئے خواہ ہم اسے کسی محدودوں میں بیان کریں اور اس لیے (دفعہ ۸)  
 جب ضہ جب ضہ + جم ضہ جم (عہ - عہ)

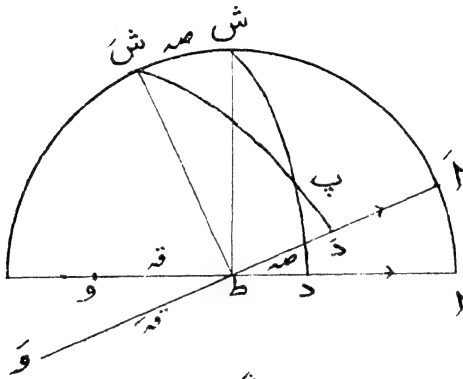
(۳۷)

= جب ضہ جب ضہ + جم ضہ جم (عہ - عہ) ... (۱)  
 وہ سب ضابطے جو اس احتمال سے متعلق ہیں فی الحقیقت اس مساوات  
 میں شامل ہیں۔

اگر کسی نقطہ پ کے محدودوں نظامات میں معلوم ہوں یعنی  
 اگر عہ ضہ، عہ ضہ معلوم ہوں اور اگر ان قیمتوں کو (ل) میں مندرج  
 کیا جائے تو عہ ضہ اور عہ ضہ میں بالعموم ایک مساوات  
 حاصل ہوگی۔ اسی طرح کسی اور نقطے کے محدودوں نظامات میں معلوم  
 ہوں تو عہ ضہ اور عہ ضہ میں ایک دوسری مساوات حاصل ہوگی۔  
 اس طرح عہ ضہ کو عہ ضہ کی رقوم میں بیان کرنے کے لیے دو مساواتیں  
 مل جاتی ہیں۔

لیکن عہ ضہ کو عہ ضہ کی رقوم میں بیگانہ طور پر معلوم کر نیکی لئے  
 دو مساواتیں کافی نہیں ہیں کیونکہ فاصلوں پ پ، پ پ، پ پ سے  
 پ کا مقام بغیر ابہام کے متعین نہیں ہوتا۔ صرف دو مقامات ہیں جسکو  
 پ اختیار کر سکتا ہے۔ ان مقامات کے فاصلے کسی تیسرے نقطہ  
 پ سے مساوی نہیں ہوں گے سوائے اس صورت کے کہ پ پ  
 اس بڑے دائرہ پر واقع ہو جائے جو پ پ میں سے گزرتا ہے۔  
 اس صورت کو خارج کر کے ہم کہہ سکتے ہیں کہ کوئی نقطہ صرف اس وقت  
 متعین ہو سکتا ہے جبکہ اس کے فاصلے تین دئے ہوئے نقطوں سے

معلوم ہوں۔ پس ہمیں عہ، ضہ اور عہ، ضہ کے درمیان ایک تیسری مساوات معلوم کرنی چاہئے اور وہ اس طرح کہ کوئی تیسرا نقطہ لیا جائے جس کے محدودوں نظامات میں عہ، ضہ، اور عہ، ضہ معلوم ہوں اور جو اس بڑے دائرہ پر واقع نہ ہو جو پہلے منتخب کئے ہوئے دو نقطوں میں سے گذرتا ہے۔



شکل (۱۷)

فرض کرو کہ ابتدائی بڑا دائرہ و (شکل ۱۷) ہے جس کی درجہ بندی تیر کی سمت میں مبدا و سے ہوئی ہے اور جس کا شطب ش ہے۔ فرض کرو کہ و (دہ بڑا دائرہ ہے جس کے لحاظ سے محدودوں کو تبدیل کرنا ہے) اس کا شطب ش اور مبدا و ہے۔ فرض کرو کہ پہلے دائرہ پر دوسرے (۳۸) دائرہ کا صعودی عقدہ ط ہے اور اس کے فاصلے و اور و سے علی الترتیب قہ، قہ ہیں۔ فرض کرو کہ ان دو درجہ دار بڑے دائروں کا میلان صہ ہے۔ پس قہ، قہ، صہ وہ تین مبدل ہیں جو پہلے دائرہ کے لحاظ سے دوسرے درجہ دار بڑے دائرہ کو پوری طرح متعین کرتے ہیں (دفعہ ۱۱)۔

اب ہمیں ایسے تین نقطوں کا انتخاب کرنا ہے جو ایک ہی بڑے دائرہ پر واقع نہ ہوں اور ایسے ہوں کہ ان کے محدودوں نظامات میں بالراست معلوم ہو سکیں۔

جو نقطے ہم منتخب کریں گے وہ علی الترتیب ط، ۱ اور ش ہیں۔ شکل سے یہ واضح ہے کہ دونوں نظامات میں ان نقطوں کے محدود حسب ذیل ہیں کیونکہ ط = ۱، ط = ۱، ۰ = ۰۔

ط کے لیے ع = ۰، ق = ۰، ض = ۰، اور ع = ۰، ق = ۰، ض = ۰۔

۱ کے لیے ع = ۰، ۱ = ۰، ق = ۰، ض = ۰، اور ع = ۰، ۱ = ۰، ق = ۰، ض = ۰۔  
ش کے لیے ع = ۰، ۱ = ۰، ق = ۰، ض = ۰، اور ع = ۰، ۱ = ۰، ق = ۰، ض = ۰۔  
ان محدودوں کو باری باری سے مساوات (۱) میں درج کرنے سے

استعمال کے عام ضابطے حاصل ہوتے ہیں

جم ض (ع - ق) = جم ض (ع - ق) ..... (۲)  
جم ض جب (ع - ق) = جب ض جب ص + جم ض جب ص جب (ع - ق) ..... (۳)  
جب ض = جب ض جب ص + جم ض جب ص جب (ع - ق) ..... (۴)  
ان سے حسب ذیل ضابطے اخذ کئے جاسکتے ہیں

جم ض (ع - ق) = جم ض (ع - ق) ..... (۲)  
جم ض جب (ع - ق) = جب ض جب ص + جم ض جب ص جب (ع - ق) ..... (۵)  
جب ض = جب ض جب ص + جم ض جب ص جب (ع - ق) ..... (۶)

کیونکہ (۳) کو جم ص سے اور (۴) کو جب ص سے ضرب دیکر ان کو جمع کرنے سے (۵) حاصل ہوتا ہے اور (۶) کو جم ص سے اور (۵) کو جب ص سے ضرب دیکر نفرت کرنے سے (۶) حاصل ہوتا ہے۔

مساواتوں کے پہلے جٹ سے محدودوں ع، ض کی تعیین ہوتی ہے جبکہ ع، ض معلوم ہوں اور دوسرے جٹ سے محدودوں ع، ض کی تعیین ہوتی ہے جبکہ ع، ض معلوم ہوں۔

کروی محدودوں کو تبدیل کرنے کے اساسی ضابطے دوسرے طریقہ سے بھی

ثابت کئے جاسکتے ہیں جو حسب ذیل ہے۔

چونکہ نشی (شکل ۱) کا قطب ط ہے اس لیے زاویہ

ط ش ش = ۹۰ نیز زاویہ ط ش د = عہ۔ قہ اور اس لیے

زاویہ ش ش ش = ۹۰ + عہ۔ قہ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ عہ۔ قہ = (۳۹)

زاویہ ط ش د اس لیے زاویہ ش ش ش = ۹۰ + عہ۔ قہ۔

شکل سے یہ بھی ظاہر ہے کہ ش ش ش = ۹۰۔ ضہ ش ش = ۹۰۔ ضہ

اور ش ش ش = صہ۔ پس مثلث ش ش ش میں اس کے تین

ضلعوں اور دو زاویوں کے لیے جملے حاصل ہو گئے اور اس لیے وقوعہ

کے اساسی ضابطوں (۱) (۲) (۳) سے ہم ضابطے (۲) (۳) (۴) اخذ

کرتے ہیں۔

استعمال کے ضابطوں میں تین مساواتوں کو حاصل کرنے کی ضرورت

جس کا ذکر پہلے آچکا ہے ضابطوں (۲) (۳) اور (۴) سے واضح کیا جاسکتا ہے

فرض کرو کہ مساواتوں (۲) اور (۳) سے عہ اور ضہ کی قیمتیں

سلاش کرنی ہیں۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

مس (عہ۔ قہ) = { جب ضہ جب صہ + جم ضہ جب صہ جب (عہ۔ قہ) } کہ خطہ قط (عہ۔ قہ)

چونکہ بائیں جانب کی سب مقدرائیں معلومہ ہیں اس لیے مس (عہ۔ قہ) معلوم

ہو جاتا ہے۔ فرض کرو کہ وہ زاویہ (۱۸۰) ط ہے جس کے پاس کی

قیمت یہ ہے تب (عہ۔ قہ) کو مونا چاہئے ط یا ط + ۱۸۰۔ ہم مساوات

(۲) سے اس بات کا تصفیہ کر سکتے ہیں کہ عہ۔ قہ کے لیے کونسی قیمت

لینی چاہئے کیونکہ ضہ اور ضہ ہمیشہ حدود۔ ۹۰ اور ۹۰ کے درمیان رہتے

ہیں اور اس لیے ضروری ہے کہ جم ضہ اور جم ضہ دونوں مثبت ہوں۔

اس لیے جم (عہ۔ قہ) کی علامت وہی ہونی چاہئے جو جم (عہ۔ قہ) کی

ہے۔ اس طرح یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ عہ۔ قہ کو ط ہو نا چاہئے یا ۱۸۰ + ط

کیونکہ ان میں صرف ایک قیمت ایسی ہوگی جو علامت میں جم (عہ۔ قہ)

کے ساتھ مطابقت کرے گی۔

پس (۱) دو مساواتوں (۲) اور (۳) سے (عہ - قہ) بغیر کسی ابہام کے متعین ہوتا ہے اور اس لیے عہ معلوم ہوتا ہے۔ پہریم (۴) سے جم ضہ معلوم کرتے ہیں۔ یہاں پہنچ کر دو مساواتوں کا ناکافی ہونا واضح ہو جاتا ہے کیونکہ گو ضہ کی مقدار معلوم ہو جاتی ہے لیکن اس کی علامت غیر متعین رہتی ہے۔ اس لیے (۶) جیسی تیسری مساوات کی ضرورت لاحق ہوتی ہے جس سے جب ضہ کی قیمت معلوم ہوتی ہے اور اس لیے ضہ کی علامت متعین ہو جاتی ہے۔

عہ، ضہ کو مساواتوں (۲)، (۳) اور (۶) سے معلوم کرنے کا مسئلہ اس طرح بھی حل کیا جاسکتا ہے :-

مساوات (۶) سے جب ضہ کی تعیین ہوتی ہے اور اس لیے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ضہ دو تکمیلی زاویوں میں سے کوئی سا زاویہ ہے۔ کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ  $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$  اور اس لیے ضہ کے لیے ہم تکمیلی زاویوں میں سے وہ قیمت اختیار کرتے ہیں جو اس شرط کو پوری کرتی ہے اس طرح ضہ معلوم ہوتا ہے اور اس لیے جم ضہ - پھر مساوات (۲) سے جم (عہ - قہ) حاصل ہوتا ہے اور مساوات (۳) سے جب (عہ - قہ) اس لیے عہ - قہ بغیر کسی ابہام کے متعین ہوتا ہے کیونکہ اس کی جیب اور جیب التمام دونوں معلوم ہیں۔

مثال ۱ - اگر  $عہ = 90^\circ + قہ$ ، ضہ = . تو ثابت کرو کہ  $عہ = 90^\circ + قہ$ ، ضہ = صہ اور وہ نقطہ معلوم کرو جو کرہ پر مشتم ہوتا ہے۔

مثال ۲ - ثابت کرو کہ  $عہ$  کے شطب کے محد پہلے اور دوسرے نظاموں میں علی الترتیب

(۴۰)

$$عہ = 90^\circ + قہ، ضہ = 90^\circ - صہ$$

اور عہ غیر متعین اور ضہ =  $90^\circ$  ہیں۔ نیز اس امر کی تصدیق کرو کہ یہ مقداریں مساواتوں (۲)، (۳)، (۴) کو پورا کرتی ہیں۔

**مثال ۳** — مساواتوں (۲)، (۳)، (۴) کی تصدیق کے طور پر یہ بتاؤ کہ بائیں جانب کے ارکان کے مربعوں کا مجموعہ ایک کے مساوی ہے۔  
**مثال ۴** — ثابت کرو کہ مساواتوں (۳) اور (۴) سے مساواتیں (۵) اور (۶) فوراً ملتی جاسکتی تھیں۔

کیونکہ ط، و، ا کے لحاظ سے دائروں کی سمتیں یہ ہیں۔ اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ع اور ضہ کو ع کے ساتھ باہم متبادل کیا جاسکتا ہے اگر ساتھ ہی قہ اور قہ میں سے ہر ایک میں ۱۸۰ کا اضافہ کیا جائے۔

**مثال ۵** — اگر دو درجہ دار بڑے دائروں کے مستوی منطبق ہوں اور اگر کرہ پر کے کسی نقطہ کے محدود ایک بڑے دائرہ کے لحاظ سے ع، ضہ اور دوسرے بڑے دائرہ کے لحاظ سے ع، ضہ ہوں تو ان محدودوں میں ربط معلوم کرو۔  
 عام ضابطوں (۲)، (۳)، (۴) میں ہم ضہ = ۱۸۰ رکھتے ہیں اگر ان دو دائروں کی درجہ بندی ایک ہی سمت میں ہوئی ہو اور ضہ = ۱۸۰ رکھتے ہیں اگر ان کی درجہ بندی مخالف سمتوں میں ہوئی ہو۔ پہلی صورت میں

$$\begin{aligned} \text{جم ضہ جم} &= (\text{قہ} - \text{عہ}) = \text{جم ضہ جم} (\text{عہ} - \text{قہ}) \\ \text{جم ضہ جب} &= (\text{قہ} - \text{عہ}) = \text{جم ضہ جب} (\text{عہ} - \text{قہ}) \\ \text{جب ضہ} &= \text{جب ضہ} \end{aligned}$$

$$\text{اس لیے ضہ} = \text{ضہ اور عہ} = \text{عہ} + \text{قہ} - \text{قہ}$$

دوسری صورت میں

$$\begin{aligned} \text{جم ضہ جم} &= (\text{قہ} - \text{عہ}) = \text{جم ضہ جم} (\text{عہ} - \text{قہ}) \\ \text{جم ضہ جب} &= (\text{قہ} - \text{عہ}) = \text{جم ضہ جب} (\text{عہ} - \text{قہ}) \\ \text{جب ضہ} &= \text{جب ضہ} \end{aligned}$$

$$\text{اس لیے ضہ} = \text{ضہ} + \text{عہ} = \text{قہ} + \text{قہ} - \text{عہ}$$

محدود ضہ یہاں علامت بدلتا ہے کیونکہ درجہ بندی کی سمت کوالٹ دینے سے مثبت اور منفی نیم کرؤں کا باہمی تبادلاً ہوتا ہے۔

**مثال ۶۔** فرض کرو کہ بنیادی درجہ دار بڑا دائرہ میں ہے اور فرض کرو کہ کسی نقطہ پ کے محدود لمباؤ میں کے بہ 'لہ' ہیں۔ فرض کرو کہ میں کوئی دوسرا درجہ دار بڑا دائرہ ہے اور اس کے شعلب کے محدود لمباؤ میں کے بہ 'لہ' ہیں۔ فرض کرو کہ میں پر میں کے صعودی عقدہ کی علامت قہ سے میں کے لمباؤ سے درجہ 'منٹ' اور ثنائی تعبیر ہو۔ تہ ہیں۔ فرض کرو کہ میں کے لمباؤ سے پ کے محدود بہ 'لہ' ہیں۔ ثابت کرو کہ بہ 'لہ' کو بہ 'لہ' کی قوم میں معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل مساواتیں ہیں

$$\left. \begin{aligned} \text{جم بہ جم (لہ - قہ)} &= \text{جم بہ جب (لہ - لہ)} \\ \text{جم بہ جب (لہ - قہ)} &= \text{جب بہ جم بہ - جم بہ جب بہ جم (لہ - لہ)} \end{aligned} \right\}$$

اور بہ 'لہ' کو بہ 'لہ' کی قوم میں معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل مساواتیں ہیں

$$\left. \begin{aligned} \text{جم بہ جب (لہ - لہ)} &= \text{جم بہ جم (لہ - قہ)} \\ \text{جم بہ جم (لہ - لہ)} &= \text{جب بہ جم بہ - جم بہ جب بہ جب (لہ - قہ)} \\ \text{جب بہ} &= \text{جب بہ جب بہ + جم بہ جم بہ جب (لہ - قہ)} \end{aligned} \right\}$$

**مثال ۷۔** فرض کرو کہ دو ستاروں کے محدود پہلے نظام میں عم، ضم اور

(۶۱)

عم، ضم اور دوسرے نظام میں عم، ضم اور عم، ضم ہیں۔ چونکہ دو ستاروں کا باہمی فاصلہ دونوں نظاموں میں وہی ہونا چاہئے اس لیے

$$\text{جب ضم جب ضم + جم ضم جم ضم (عم - عم)}$$

$$= \text{جب ضم جب ضم + جم ضم جم ضم (عم - عم)}$$

اس کی تصدیق مساواتوں (۶)، (۳)، (۴) سے کرو۔

**مثال ۸۔** کرہ پر کے محدودوں میں ان تبدیلیوں کی تشریح کرو جو کرہ کو اندر کی طرف سے یا باہر کی طرف سے دیکھنے میں وقوع پذیر ہوتی ہیں اور ثابت کرو کہ ضابطہ غیر متغیر رہتے ہیں۔

کرہ کو باہر کی طرف سے دیکھتے ہیں وہ جیسا نظر آتا ہے اس کی بنا پر

شکل (۱۷) کھینچی گئی ہے اور بالعموم شکلیں اسی لحاظ سے کھینچی جاتی ہیں۔  
لیکن اگر ہم چاہیں کہ شکل (۱۷) کرہ کے ایک حصہ کو تغیر کرے جبکہ اسے  
اندزہ کی طرف سے دیکھا جائے تو طائرہ زلی عقدہ ہوگا۔ پس ضابطوں میں  
قہ اور ضہ کی بجائے ۱۸۰ + قہ اور ضہ لکھنا ہوگا اور اسی طرح  
قہ، ضہ کی بجائے ۱۸۰ + قہ اور ضہ۔ لیکن ان تبدیلیوں سے ضابطوں  
(۲)، (۵)، (۶) میں کوئی تغیر نہیں ہوتا۔

مثال ۹۔ اگر دو نقطوں کے محدود ضہ اور عہ ضہ ہوں تو  
ثابت کر دو کہ اس بڑے دائرہ کے عقدے جو انہیں ملاتا ہے مہداسے فاصلوں  
لی اور لی + ۱۸۰ پر واقع ہیں جہاں

$$ل = \frac{۱}{۲} (عہ + عہ) - مس \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{جب } (ضہ + ضہ) \\ \text{جب } (ضہ - ضہ) \end{array} \right. \quad مس \frac{۱}{۲} (عہ - عہ) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{جب } (ضہ + ضہ) \\ \text{جب } (ضہ - ضہ) \end{array} \right.$$

۱۳۔ لوکارتموں کا استعمال۔ اگر احتمال شدہ محدودوں عہ ضہ

کو محسوب کرنے میں مساواتیں (۲)، (۵)، (۶) اسی شکل میں استعمال  
کی جائیں جس میں وہ دو نقطہ (۱۲) میں لکھی گئی ہیں تو مساوات (۶) کی بائیں جانب  
کی دو رقموں کو لوکارتموں کی مدد سے محسوب کرنا ہوگا اور پھر ضہ کو طبعی  
جیب کی جدول سے معلوم کرنا ہوگا۔ مساوات (۲) سے حجم (عہ - قہ)  
معلوم ہوگا اور مساوات (۵) صرف عہ - قہ کی علامت متعین کرنے میں  
استعمال ہوگی، اس کے لیے صرف بائیں جانب کی دو رقموں کے لوکارتموں  
کو محسوب کرنے کی ضرورت ہے اگرچہ یہ رقبے مختلف علامت ہی کیوں  
نہ ہوں۔

لیکن اکثر سہولت اس میں خیال کی گئی ہے کہ ضابطوں (۲)، (۵)،  
(۶) کا استعمال ایسی امدادی مقداروں کے ذریعہ عمل میں لایا جائے جن کے  
ادخال سے یہ ضابطے لوکارتمی عمل حساب کے لیے زیادہ موزوں ہو جاتے  
ہیں۔ ایسا کرنے کا بہترین طریقہ حسب ذیل ہے :-



فرض کرو کہ م ایک مثبت مقدار ہے اور ہ، صفر اور ۳۶۰ کے درمیان، ایک زاویہ ہے اور یہ دونوں مقداریں ایسی ہیں کہ

جب ضہ = م جم ہ، جم ضہ جب (عہ - قہ) = م جب م  
اس لیے مس م = مم ضہ جب (عہ - قہ)۔ اگر ہ وہ چھوٹے سے  
چھوٹا زاویہ ہے جو اسے پورا کرتا ہے تو ہ، م ہے یا ہ + ۱۸۰۔ چونکہ م  
مثبت ہے اس لیے ہ کی وہ قیمت متعجب کرنی چاہئے کہ جم ہ کی وہی علامت  
حاصل ہو جو جب ضہ کی ہے۔ اس طرح لوگ م اور ہ معلوم ہو جاتے  
ہیں۔ ان امدادی مقداروں کو (۲)، (۵)، (۶) میں درج کرنے سے

یہ مساواتیں حسب ذیل ہو جاتی ہیں

$$\left. \begin{aligned} \text{جم ضہ جب (عہ - قہ)} &= \text{جم ضہ جب (عہ - قہ)} \\ \text{جم ضہ جب (عہ - قہ)} &= \text{م جب (م + صہ)} \\ \text{جب ضہ} &= \text{م جم (م + صہ)} \end{aligned} \right\} \dots (۱)$$

ان میں سے آخری ضابطے سے ضہ کی مقدار (۹۰) اور علامت  
دونوں حاصل ہوتے ہیں۔ اس قیمت کو دوسرے دو ضابطوں میں درج  
کرنے سے جم (عہ - قہ) اور جب (عہ - قہ) دونوں معلوم ہوتے ہیں۔  
پہلے ضابطے سے عہ - قہ کی مقدار ملتی ہے اور دوسرے سے اس کی علامت  
مثال ۱۔ ایک نقطہ کے محدود عہ = ۲۵، ضہ = ۱۵ ہیں۔ ضابطوں

(۲)، (۵)، (۶) سے ثابت کرو کہ جب ان محدودوں کو مقداروں قہ = ۲۱۵،  
صہ = ۳۰، ۲۳ بقہ = ۱۱۵ سے متعین ہونے والے دائرہ کے لحاظ سے  
متعین کیا جاتا ہے تو یہ محدود ہو جاتے ہیں عہ = ۳۲، ۳۱، ضہ = ۲۹، ۲۸۔  
مثال ۲۔ اگر مثال ۱ کو امدادی مقداروں ہ اور م کی مدد سے حل

کیا جائے تو ثابت کرو کہ ہ = ۳۸، ۲۹۲ اور ل م = ۹، ۸۲، ۷۸۔  
مثال ۳۔ اگر ط پ کو (شکل ۱۰) خارج کرنے پر وہ شش شے سے  
ک پ پر لے تو ثابت کرو کہ م = جم پ ک اور ہ = شش ک - نیز  
قائم الزاویہ مثلث شش پ ک سے ضوابط (۱) حاصل کرو۔

# تیسرا باب

## زمین کی شکل اور نقشہ کشی

(۴۳)

صفحہ

۶۵	۱۴ - تمہید
۶۶	۱۵ - عرض بلد
۷۱	۱۶ - نصف النہار پر نصف قطر انحناء
۷۵	۱۷ - نقشہ کشی کا نقشہ
۷۷	۱۸ - نقشہ کے ہم شکل ہونے کی شرطیں
۸۱	۱۹ - ہم شکل تعبیر میں پیمانہ
۸۱	۲۰ - مرکب (Mercator) کا ظل
۸۶	۲۱ - مساوی المیلان
۸۹	۲۲ - طبیعی اظلال
۹۳	۲۳ - کرہ پر کسی دائرہ کا طبیعی ظل بھی ایک دائرہ ہوتا ہے
۹۶	۲۴ - طبیعی ظل کے لیے عام ضابطے
۹۹	۲۵ - ایسا نقشہ بنانا جس میں کرہ پر کا ہر رقبہ نقشہ پر مساوی رقبہ کے ذریعہ تعبیر ہو

۱۴ - تمہید - ہم دیکھتے ہیں کہ سورج چاند اور دیگر اجرام فلکی کی شکلیں گول ہیں اس سے

اس امر کا پتہ چلتا ہے کہ زمین کی شکل بھی گول ہونی چاہئے۔ اس کا ثبوت جو روزمرہ حقائق سے دیا جاتا ہے جغرافیہ کی کتابوں میں ملے گا۔

زمین کی شکل کی صحیح پیمائش علم ہیئت میں بنیادی اہمیت رکھتی ہے اور یہ باب اس مضمون کے ابتدائی حصوں کے لیے وقف ہوگا اور اس کی تشریح کی جائے گی کہ زمین جیسی منحنی سطحیں کس طرح مستوی سطحوں کی تعمیر کی جاسکتی ہیں جیسا کہ نقشہ کشی میں کیا جاتا ہے۔

یہ واضح کر دینا ضروری ہے کہ جملہ ”زمین کی شکل“ سے مراد اس کی وہ بے قاعدہ اور بے ڈھنگی سطح نہیں ہے جو خشکی اور تری میں منقسم ہے اور جیسے ہم فی الواقع اُسے دیکھتے ہیں بلکہ اس جملہ سے وہ سطح مراد ہے جس کا کچھ حصہ ساکن سمندر سے ظاہر ہوتا ہے اور جو دیگر حصوں میں اس ہموار سطح پر منطبق خیال کی جاسکتی ہے جس تک پانی اس مقام پر بڑھتا اگر اُسے نہروں کے ذریعہ سمندر سے آزادانہ آنے دیا جائے، ہم تصور کر سکتے ہیں کہ ایسی نہریں ایک سمندر سے دوسرے سمندر تک براعظموں کو عبور کر رہی ہیں۔

## ۱۵۔ عرض بلد۔

اگر زمین کو ایک کرہ تصور کیا جائے تو زمین کی سطح پر کسی مقام کا عرض بلد اس مقام کو زمین کے مرکز سے ملائے والے ارضی نصف قطر اور ارضی خط استوا کے مستوی کا درمیانی میلان ہوتا ہے۔ لیکن زمین کی حقیقی شکل کرہ کی نہیں ہے بلکہ اس کی شکل قریب قریب اس گردشی کرہ نما کی ہے جو ایک قطع ناقص کو اس کے محور اصغر کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس ناقص کے نیم محوروں کے طول جو کرنل کلارک نے دئے ہیں حسب ذیل ہیں:-

$$1 = 209262.2 \text{ فٹ} [6372.996 \text{ میل}]$$

$$2 = (\text{تقریباً}) 296363 \text{ میل} [475098.6 \text{ فٹ}]$$

$$[3680.340] \text{ کیلومیٹر } 434852 =$$

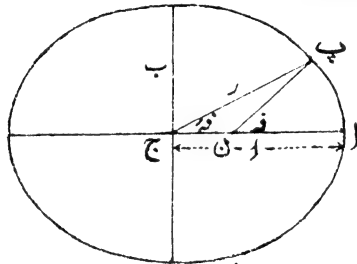
$$[453192.80] \text{ فٹ } 20.854895 = \text{ ب}$$

$$[3559454] \text{ میل } 393958 (\text{تقریباً}) =$$

$$[3680.322] \text{ کیلومیٹر } 435455 =$$

قطر و حدائی کے اندر کے عددوں کے لوکار نم ہیں جو ان کے ساتھ لگے ہوئے ہیں۔

اگر زمین کی سطح کے کسی نقطہ پ پر کاغذ پ ن (شکل ۱۸) خط استوا کے مستوی سے ن پر ملے اور ج ن (نیم محور اعظم ہو تو زاویہ پ ن ((= فہ)) پ کا جغرافیائی عرض بلد ہے اور زاویہ پ ج ((= فہ)) اس کا ارض مرکزی (Geocentric) عرض بلد ہے۔



شکل (۱۸)

$$\text{اگر قطع ناقص کی مسافات } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \text{ ہو اور پ کے}$$

محدوجس کا خارج المکرکز زاویہ (Excentric angle) لہ ہے لا اور ماہوں تو ہم آسانی کے ساتھ یہ دیکھتے ہیں کہ

$$\text{مس فہ} = \text{مس لہ} \text{ ب، مس فہ} = \text{مس لہ} \text{ ا}$$

(۴۵) اور فہ اور فہ میں ربط ہے مس فہ = ب مس فہ ا جس سے ارض مرکزی عرض بلد حاصل ہوتا ہے جبکہ حقیقی یا جغرافیائی عرض بلد معلوم ہو یا اس کے برعکس۔

ہم رکوجب کا ارض مرکزی فاصلہ ہے اس طرح معلوم کرتے ہیں

$$ر^۲ = لا^۲ + ما^۲ = و^۲ جم^۲ لہ + ب^۲ جب^۲ لہ$$

$$\frac{و^۲ جم^۲ فہ + ب^۲ جب^۲ فہ}{و^۲ جم^۲ فہ + ب^۲ جب^۲ فہ} =$$

$$ر = \frac{و^۲ جم^۲ فہ + (ا - ز)^۲ جب^۲ فہ}{ا - ز جب^۲ فہ} = و^۲ (ا - ز جب^۲ فہ)$$

اگر ز کی دو سے اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز کر دی جائیں۔  
انہی شرطوں کے تحت

$$مس (فہ - فہ) = مس فہ - مس فہ = \frac{مس فہ (و^۲ - ب^۲)}{و^۲ + ب^۲} = ز جب فہ جم فہ$$

اور اس لیے ہم حسب ذیل نتیجے پر پہنچتے ہیں :-  
اگر زمین کے متعلق یہ سمجھا جائے کہ وہ ایک ناقص کوجس کا خروج المکز  
ز ہے اس کے محور اصغر کے گرد گھمانے سے پیدا ہوئی ہے اور اگر زمین کا آستوانی  
نصف قطر اکائی کے طور پر لیا جائے تو زمین کی سطح پر جس نقطہ کا جغرافیائی  
عرض بلد فہ ہو اس کا تقریبی ارض مرکزی عرض بلد اور سمتی نصف قطر  
حسب ذیل ہوں گے :-

$$فہ = ز - \frac{۱}{۲} [ز^۲ قم^۲ جب^۲ فہ]$$

$$ر = ا - \frac{۱}{۲} ز^۲ + \frac{۱}{۲} ز^۲ جم^۲ فہ$$

و اعد ب کی مندرجہ بالا کلا راک کی قیمتیں استعمال کرنے سے

$$ز^۲ = (و^۲ - ب^۲) \setminus ۱ = ۱۴۷ \setminus ۱$$

اور اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

فہ = فہ - ۰.۲ = جب ۲ فہ = فہ - [۲۶۸۴۶۰] جب ۲ فہ  
 ۱ = ۶۹۹۸۳ + [۴۶۲۳۰۶] جم ۲ فہ  
 اس لیے جغرافیائی عرض بلد میں سے ۰.۲ جب ۲ فہ تفریق کرنا ہوگا  
 تاکہ ارض مرکزی عرض بلد حاصل ہو۔  
 اگر تقرب اس سے اعلیٰ تر درجہ تک حاصل کرنا ہو تو حسب ذیل  
 طریقہ پر عمل کیا جاسکتا ہے :-

$$\text{مس (فہ - فہ)} = \frac{(\text{ا} - \text{ب}) \text{مس فہ}}{(\text{ا} + \text{ب}) \text{مس فہ} + (\text{ا} - \text{ب}) \text{جم ۲ فہ}}$$

اس سے آسانی کے ساتھ تقریبی ضابطہ

$$\text{فہ - فہ} = \frac{(\text{ا} - \text{ب}) \text{قم آجب ۲ فہ}}{(\text{ا} + \text{ب}) \text{قم آجب ۲ فہ} + (\text{ا} - \text{ب}) \text{جم ۲ فہ}}$$

حاصل ہوتا ہے -  
 فہ اور ر کو صحیح طور پر محسوب کرنے کے لیے حسب ذیل طریقہ ہے  
 جو اکثر استعمال کیا جاتا ہے :-

و کو اکائی کے طور پر لینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{رجم فہ} = \text{لا} = \text{جم لہ} = \text{جم فہ} \sqrt{1 - \text{ز آجب فہ}}$$

$$\text{رجب فہ} = \text{ما} = \text{ب جب لہ} = (\text{ا - ز}) \text{جب فہ} \sqrt{1 - \text{ز آجب فہ}}$$

اس لیے اگر ہم رکھیں

$$\text{لا} = \frac{(\text{ا - ز})}{\sqrt{1 - \text{ز آجب فہ}}} \text{ما} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{ز آجب فہ}}}$$

تو نائل ہوتا ہے رجب فہ = لاجب فہ ، رجم فہ = ماحجم فہ

فہ کے ہر درجہ کے جواب میں مقداروں لا اور ما کی قیمتیں انگریز

میں ملیں گی۔ چونکہ لا اور ما میں جب فہ ۲۱ سے مضروب ہے اس لیے فہ میں ایک چھوٹی خطا واقع ہو تو اس سے لا اور ما پر کوئی قابل قدر اثر نہیں پڑیگا۔ پس لوک لا اور لوک ما بغیر کسی تکلیف وہ یعنی ادرج کے صرف جدول دیکھ لینے سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ پھر لوک لا اور لوک ما میں علی الترتیب لوک جب فہ اور لوک جم فہ کی ٹھیک ٹھیک قیمتیں جمع کرنے سے ہم لوک ر جب فہ اور لوک ر جم فہ معلوم کرنے میں اور پھر لا اور فہ سے لوک لا اور لوک ما کے درمیان فرق مستقل ہے۔ اس طریقہ کے اطلاق کی ایک مثال کے طور پر ہم حسب ذیل صورت لے سکتے ہیں:-

کیمبرج کا جغرافی عرض بلد ۵۲° ۱۲' ۵۲" ہے۔ ثابت کرو کہ ارض مرکزی عرض بلد معلوم کرنے میں جو تخفیف استعمال کرنی ہوگی وہ - ۱۱' ۲۲" ہے۔ نیز کیمبرج کا فاصلہ زمین کے مرکز سے معلوم کرو اگر زمین کے استوائی نصف قطر کو اکائی کے طور پر لیا جائے۔

لوک ما = ۹۲۳۷۰۰۰	لا = ۹۵۹۹۷۹۹
لوک جم فہ = ۹۵۸۷۷۲۵۳۳	لوک جب فہ = ۹۵۸۹۷۷۷۲
لوک ر جم فہ = ۹۵۷۸۸۱۷۸۱	لوک ر جب فہ = ۹۵۸۹۵۷۷۷۱
	لوک ر جب فہ = ۹۵۷۸۸۱۷۸۱
	مسرفہ = ۹۰۷۷۷۷۷۷
فہ ۵۲° ۱۲' ۵۲"	لوک ر جب فہ = ۹۵۸۹۵۷۷۷۱
فہ ۵۲° ۱' ۳۰"	لوک جب فہ = ۹۵۸۹۶۶۸۰۱
فہ = ۵۲° ۱۱' ۲۲"	لوک ر = ۹۵۹۹۹۰۷۷۷
	۹۵۹۹۷۷۷۷ = ۱

۱۔ اس عرض بلد اور لوک ر کی تخفیف کا حساب لگانے میں مدد دینے کے لیے ای۔ جی۔ اسٹون نے ایک جدول "Monthly Notices" R.A.S. vol. xliii میں دی ہے۔





ہوں تو اس نقطہ پر کے عماد کی مساوات ہے  
 ولا جب طہ - ب ما جم طہ = (ا' - ب') جب طہ جم طہ (۱)  
 اور عرض بلد نہ یا وہ زاویہ جو یہ عماد محور اعظم کے ساتھ بناتا ہے مساوات  
 مس نہ = ا' مس طہ \ ب

سے معلوم ہوتا ہے -  
 مرکز انحناء دو متصلہ عمادوں کا نقطہ تقاطع ہوتا ہے - اس لیے (ا) کو  
 طہ کے لحاظ سے تفرق کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مرکز انحناء کے محددوں کو  
 مساوات

ا' لا جم طہ + ب ما جب طہ = (ا' - ب') جم طہ (۲)  
 پوری کرنی چاہئے -  
 اب (ا) اور (۲) کو لا اور ما کے لیے حل کیا جائے تو مرکز انحناء کے  
 حسب ذیل محدد حاصل ہوتے ہیں

لا = (ا' - ب') جم طہ \ ا' ما = (ب' - ا') جب طہ \ ب  
 اور اس لیے نصف قطر انحناء

مس = (ا' جب طہ + ب' جم طہ) \ ا' ب

یا نہ کی رقوم میں  
 مس = ا' ب' (ب' جب طہ + ا' جم طہ) \ ا' ب'  
 ہے - پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک ہی نصف النہار پر دو نقطوں کا درمیانی  
 فاصلہ مس ہو اور ان کے جغرافی عرض بلد نیم قطری زاویوں میں علی السریب  
 نہ اور نہ ہوں تو

مس = ا' ب' (ب' جب طہ + ا' جم طہ) \ ا' ب' فرہ

اس سے آسانی کے ساتھ یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر خروج المکرز کی دو سے اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز کی جائیں تو عرض بلدوں  $\phi$  اور  $\phi_1$  کو ملائے والی قوس کی تقریبی قیمت یہ ہے

$$س = (1 - \frac{1}{4})ج - (\phi_1 - \phi) - \frac{3}{4}ج جب (\phi_1 - \phi) جم (\phi_1 + \phi)$$

جہاں  $ج = (1 - ب)$ ، مقدار  $\frac{3}{4}ج$  کو بالعموم ناقصیت (Ellipticity)

کہا جاتا ہے۔

نیز عرض بلد  $\phi$  پر نصف النہار کے نصف قطر انحناء کے لیے یہ جملہ حاصل ہوتا ہے

$$1 - \frac{1}{4}ج - \frac{3}{4}ج جم 2 \phi$$

اور نصف النہار کے ربع کا تقریبی طول  $\pi (1 + ب)$  ہے۔  
مثال ۱۔ اگر عرض بلدوں  $60^\circ$  اور  $50^\circ$  پر نصف النہاروں کے ایک درجہ کے طول علی الترتیب  $س_1$  اور  $س_2$  ہوں تو ثابت کرو کہ زمین کی ناقصیت اگر زمین کو ایک گردشی کرہ نما سمجھا گیا ہو  $\frac{3}{4}(س_1 - س_2)$  ہے۔

عرض بلد  $\phi$  پر نصف النہار کے نصف قطر انحناء کا طول  $1 - \frac{1}{4}ج - \frac{3}{4}ج جم 2 \phi$  ہے۔ اس لیے عرض بلد  $\phi$  پر  $1$  کا طول

$$1 - \frac{1}{4}ج - \frac{3}{4}ج جم 2 \phi = 2 \pi \setminus 360$$

$$س_1 = (1 + \frac{1}{4}ج) 2 \pi \setminus 360$$

$$س_2 = (1 - \frac{1}{4}ج) 2 \pi \setminus 360$$

$$اس لیے \frac{س_1}{س_2} - 1 = \frac{ج}{2}$$

مثال ۲۔ اگر زمین کی چوتھی قوتوں تک قیاسی جائیں تو ثابت کرو کہ جغرافیہ عرض بلد  $\phi$  کے کسی نقطہ پر نصف النہار کے نصف قطر انحناء کے لیے جملہ ہے

$$س = 1 - (1 - \frac{1}{4}ج - \frac{3}{4}ج جم 2 \phi) - (\frac{3}{4}ج + \frac{3}{4}ج جم 2 \phi + \frac{15}{64}ج جم 4 \phi)$$

**مثال ۳۔** زمین کو گردشی کرہ نامسم کر اور اس کے نیم محوروں کو کلا ر کے مستقل کے مساوی لیکر ثابت کرو کہ قطب سے خط استوا تک کھینچے ہوئے نصف النہار کے ربع میں بیٹروں کی تعداد ۸۶۰۰۰۱ ہے۔ (نوٹ میٹر فٹوں میں) = ۵۱۵۹۸۸۹۔

**مثال ۴۔** کلا رک کی جیوڈیسی (Geodesy) صفحہ ۱۱۲ میں یہ لکھا ہے "ارضیاتی اعمال حسب میں یہ رواج ہے کہ کسی نصف النہار پر پیمائش کردہ فاصلہ کو ہماری یہ فاصلہ ایک درجہ سے متوازن نہ ہوتا ہو عرض بلد کے فرق میں اس طرح تبدیل کرتے ہیں کہ اس طول کو اس نصف قطر انحراف سے تقسیم کرتے ہیں جو وسطی نقطہ کے یا زیادہ صحیح طور پر حدودی (سروں پر کے) عرض بلدوں کے اوسط کے متناظر حاصل ہوتا ہے۔"

(۷۹) اگر  $\frac{1}{4}$  ع اور  $\frac{1}{4}$  ع انتہائی عرض بلد ہوں تو ثابت کرو کہ اس مفروضہ کو اختیار کرنے سے تقریباً  $\frac{1}{4}$  (ب) جب  $\frac{1}{4}$  ع کی خطا ہوگی۔ کیونکہ قوس  $S = (1 - \frac{1}{4} \text{ ع})$  جب  $\frac{1}{4}$  ع جب  $\frac{1}{4}$  ع جم  $\frac{1}{4}$  ع جیسا کہ قبل ازیں دکھایا جا چکا ہے، لیکن مفروضہ قوس  $(1 - \frac{1}{4} \text{ ع})$  جب  $\frac{1}{4}$  ع جم  $\frac{1}{4}$  ع ہے۔ اس لیے ان کا فرق ہے

$\frac{1}{4}$  ع جم  $\frac{1}{4}$  ع (ع۔ جب ع) =  $\frac{1}{4}$  ع جب  $\frac{1}{4}$  ع جم  $\frac{1}{4}$  ع کیونکہ ع چھوٹا ہے۔ یہ فرق انہوں میں تقریباً

۲۱۴۰۰۰ جب  $\frac{1}{4}$  ع جم  $\frac{1}{4}$  ع

ہے جو تقریباً نصف انج ہوگا اگر  $\frac{1}{4}$  ع = ۶۰ اور ع = ۱۔

**مثال ۵۔** ثابت کرو کہ عرض بلد  $\frac{1}{4}$  ع سے عرض بلد  $\frac{1}{4}$  ع تک نصف النہار پر چلنے سے فٹوں کی تعداد جو عبور کرنی ہوگی وہ ۶۰۰۰۰ - ۲۱ جم  $\frac{1}{4}$  ع

ہے۔ **مثال ۶۔** اگر عرض بلد  $\frac{1}{4}$  ع کے توازی کا نصف قطر لائیں ہو اور اس توازی کا ارتضاع خط استوا کے اوپر مائیل ہو تو کلا رک کے مفروضات

قلیم کر کے ثابت کرو کہ

$$\text{لا} = ۳۹۶۶۶۷۷ - \text{جم} ۳۱۴ - \text{فہ} ۳$$

$$\text{ما} = ۳۹۶۶۶۷۷ - \text{جب} ۳۱۴ - \text{فہ} ۳$$

نیز ثابت کرو کہ اگر عرض بلد فہ پر نصف النہار کا نصف قطر انحدار ہو تو

$$\text{و} = ۳۹۵۶۶۷۷ - ۲۰۵۲ - \text{جم} ۲$$

**مثال ۷۔** کلارک کے مستقلوں سے ثابت کرو کہ عرض بلد فہ پر نصف النہار کے ایک درجہ کا طول فٹوں میں

$$۳۶۴۶۰۹ - ۱۸۶۷ - \text{جم} ۲ - \text{فہ} ۴ + \text{جم} ۴$$

سے تعبیر ہوتا ہے جہاں فہ قوس کے وسطی نقطہ کا عرض بلد ہے۔ نیز ثابت کرو کہ طول بلد کے ایک درجہ کا طول

$$۳۶۵۵۲۳ - \text{جم} ۲ - \text{فہ} ۳۱۲ - \text{جم} ۳$$

## ۱۷۔ نقشہ کشی کا نظریہ

یہاں لفظ نقشہ سے مراد کرہ پر کے نقطوں یا مشکلوں کی کوئی مستوی تعبیر ہے۔ سب سے پہلے ان طریقوں پر غور کرنا چاہئے جن کے ذریعہ کرہ پر کے ایک نقطہ کے جواب میں نقشہ پر اس کا متناظر نقطہ مقرر ہو سکے۔ ہمیں یا تو ہندسی عمل معلوم کرنا چاہئے جس کے ذریعہ نقشہ پر کا ہر نقطہ کرہ پر کے اس نقطہ سے متعلق ہو جائے جسے وہ تعبیر کرتا ہے، یا دو مضابطہ معلوم ہونے چاہئیں جن سے یہ دریافت ہو سکے کہ اگر کرہ پر کے کسی نقطہ کے محدودے جائیں تو نقشہ پر متناظر نقطہ کے قائم محدود کیا ہیں۔ یہ دونوں طریقہ استعمال کئے جاتے ہیں۔ ہم ثانی الذکر سے ابتدا کریں گے۔

فرض کرو کہ ایک اساسی بڑے دائرہ کے حوالہ سے کرہ پر کے کسی نقطہ کے عرض بلد اور طول بلد علی الترتیب بہ، لہ ہیں۔ فرض کرو کہ دو علی الترتیب محوروں کے لحاظ سے ایک مستوی میں متناظر نقطہ کے محدود لا، ما ہیں۔

(۵۰)

اگر بہ اور لہ دے گئے ہوں تو سوال کو حل کرنے کے لیے ضروری ہے کہ لا اور ما کے لیے جملے حاصل ہو سکیں۔ اس کے عکس مسئلہ پر بھی غور کرنا ہے یعنی اگر لا اور ما دے گئے ہوں تو بہ اور لہ معلوم کرنے کے لیے کوئی جملے ہونے چاہئیں۔ ان امور سے

لا = ف، (بہ، لہ)، ما = ف، (بہ، لہ)

جیسے رشتوں کے وجود کا اظہار ہوتا ہے جہاں ف، اور ف، معلوم متعلق ہیں۔ یہ شاید نقشہ کشی کے فن کا عام ترین تخیل ہے۔

بہر حال تقاطعوں ف، اور ف، پر بہت سے قیود عائد کرنے ہوں گے تاکہ وہ علی مقاصد پورے ہو سکیں جن کے لیے نقشہ تیار کئے جاتے ہیں۔ مثلاً برطانیہ عظمیٰ کا کوئی نقشہ اسی وقت مفید ہوگا جبکہ اس پر مختلف قطعات کی وضع قطع حتی الامکان وہی ہو جو زمین کی کروئی سطح پر ان قطعات کی واقعی ہے۔ نیز نقشہ پر دکھائے ہوئے مختلف شہروں کے باہمی فاصلے، کم از کم تقریبی طور پر، ان حقیقی فاصلوں کے متناسب ہونے چاہئیں جو زمین کی سطح پر بڑے دائرہ کی قوس میں ناپے گئے ہوں۔ ہم اصرار کرتے ہیں کہ تذکرہ بالا شرطیں کسی حال میں بھی ٹھیک ٹھیک پوری نہیں ہو سکتیں۔ یہ ممکن نہیں ہے کہ کوئی ایسا مستوی نقشہ تیار کیا جاسکے کہ کرہ پر کے نقطوں کے ہر زوج کے درمیانی فاصلے اپنے حقیقی تناسبوں میں اس نقشہ پر تعبیر ہو سکیں۔ لیکن بلاشبہ مختلف طریقوں سے یہ ممکن ہے کہ ایک ایسی مطابقت پیدا کی جائے کہ ہر کروئی شکل جس کا ہر بعد کرہ کے قطر کے مقابلہ میں چھوٹا ہو نقشہ پر ایک شکل کے ذریعہ جو بڑی حد تک مشابہ ہو تبصرہ ہو سکے۔ اگر کسی کروئی مثلث کو نقشہ میں ایک مستوی مثلث کے ذریعہ تعبیر کرنا ہو تو یہ ظاہر ہے کہ ان کے متناظر زاوے مساوی نہیں ہو سکتے کیونکہ کروئی مثلث کے مین زاویوں کا مجموعہ ۱۸۰ سے بڑا ہوتا ہے اور اس لیے اس کے زاوے کسی مستوی مثلث کے زاوے نہیں ہو سکتے۔ لیکن اگر کروئی مثلث بمقابلہ کرہ کی کل سطح کے چھوٹا ہو تو کروئی اضافہ (۱ + ب + ج - ۱۸۰)

چھوٹا ہوگا اور اگر اسے نظر انداز کیا جاسکے تو ہم مختلف طریقوں سے تفاسل ف، اور ف، معلوم کر سکتے ہیں اور اس لیے کرہ پر کا ہر چھوٹا کروی مثلث اُس مثلث کے مشابہ ہوگا جو مستوی میں اس کو تعبیر کرتا ہے۔ ہم شکل تعبیر (Conformal Representation) کے نام سے موسوم کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ نقشہ پر کے نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج'، کرہ پر کے نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کو تعبیر کرتے ہیں اور مان لو کہ یہ نقطے متصلہ ہیں۔ اگر نقشہ ہم شکل ہے تو

$$\frac{اب}{اَب} = \frac{بج}{ب_ب} = \frac{ج ا}{ج_ا}$$

اور جب تک کہ کرہ کے متصل نقطوں کے لئے یہ رشتے عام طور پر درست نہ ہوں نقشہ ہم شکل نہیں ہوگا۔

۱۸۔ نقشہ کے ہم شکل ہونے کی شرطیں۔ وہ عام

شرطیں کہ نقشہ ہم شکل ہو اس طرح معلوم کی جاتی ہیں :-

فرض کرو کہ کرہ پر تین متصلہ نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج' ہیں اور 'ا' کے محدود 'ا'، 'ب' کے محدود 'ب' + 'ا'، 'ک'، اور 'ج' کے محدود 'ب' + 'ا'، 'ک'، ہیں جہاں 'ا'، 'ک'، چھوٹی مقداریں ہیں۔ اب بموجب دفعہ ۸

$$اَب = ا' (ا' + ک' جم' ب) = ا' ج = ا' (ا' + ک' جم' ج) + (ک' - ک') جم' ب$$

$$ج ا = ا' (ا' + ک' جم' ج)$$

جہاں 'ا'، کرہ کا نصف قطر ہے۔

اگر 'ا'، 'ب'، 'ج' کے جواب میں مستوی نقشہ پر نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج' ہوں اور اگر 'ا' کے محدود 'ا'، 'ب'، 'ج' کے محدود

$$\text{لا} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف پ}} + \frac{\text{جف لا ک}}{\text{جف ل}} + \text{ما} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف پ}} + \frac{\text{جف ما ک}}{\text{جف ل}}$$

اور ج کے حدود

لا +  $\frac{\text{جف لا}}{\text{جف پ}}$  +  $\frac{\text{جف لا ک}}{\text{جف ل}}$  + ما +  $\frac{\text{جف ما}}{\text{جف پ}}$  +  $\frac{\text{جف ما ک}}{\text{جف ل}}$   
 ہیں۔ اگر مثلثات (ب ج اور ب ج مشابہ ہوں اور ہا ایک  
 مشترک جزو ضربی ہو جو ہا ک، ہا اک پر منحصر نہ ہو تو

$$\left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{\text{جف لا}}{\text{جف پ}} + \frac{\text{جف لا ک}}{\text{جف ل}} \right) + \left( \frac{\text{جف ما}}{\text{جف پ}} + \frac{\text{جف ما ک}}{\text{جف ل}} \right) = \text{ہا}^2 (\text{ک} + \text{ک}^2) \\ & \left( \frac{\text{جف لا}}{\text{جف پ}} + \frac{\text{جف لا ک}}{\text{جف ل}} \right) + \left( \frac{\text{جف ما}}{\text{جف پ}} + \frac{\text{جف ما ک}}{\text{جف ل}} \right) = \text{ہا}^2 (\text{ک} + \text{ک}^2) \\ & \left\{ \frac{\text{جف لا}}{\text{جف پ}} (\text{ہا} - \text{ہا}^2) + \frac{\text{جف لا ک}}{\text{جف ل}} (\text{ک} - \text{ک}^2) \right\} + \left\{ \frac{\text{جف ما}}{\text{جف پ}} (\text{ہا} - \text{ہا}^2) + \frac{\text{جف ما ک}}{\text{جف ل}} (\text{ک} - \text{ک}^2) \right\} \\ & = \text{ہا}^2 (\text{ک} + \text{ک}^2) (\text{ہا} - \text{ہا}^2) (\text{ک} - \text{ک}^2) \end{aligned} \right.$$

(۱) یہ مساواتیں، ہا، ک، ہا ک کی تمام قیمتوں کے لیے پوری ہوں گی  
 اگر حسب ذیل مساواتیں پوری ہوں

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف پ}} \times \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ل}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف پ}} \times \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ل}} = 0 \dots \dots (۲)$$

$$\left( \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ل}} \right) + \left( \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ل}} \right) = \text{جم}^2 \dots \dots \left\{ \left( \frac{\text{جف لا}}{\text{جف پ}} \right) + \left( \frac{\text{جف ما}}{\text{جف پ}} \right) \right\} \dots (۳)$$

اگر تعین ہم شکل ہے تو لا اور ما کو یہ شرطیں پوری کرنی چاہئیں جبکہ ان کو  
 ہا اور ل کی رقوم میں بیان کیا گیا ہو۔

جب کوئی ہم شکل نقشہ تیار ہو جا تا ہے تو دوسرے متعدد نقشے  
 حسب ذیل طریقہ پر حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

(۵۲)

فرض کرو کہ ملف متغیر لا + خر ما، غ سے تعبیر ہوتا ہے جہاں خر حسب معمول۔ اکا جذر المربع ہے۔ اگر ہم غ کا کوئی تفاعل لیں مثلاً غ یا جب غ یا لوک مس غ وغیرہ یا زیادہ عام صورت میں ف (غ) تو ہمیں ایک دوسرا ملف متغیر حاصل ہوتا ہے جسکو اس طرح تعبیر کیا جاسکتا ہے :

$$ف (لا + خر ما) = ۶ + خر و$$

$$ف (لا - خر ما) = ۶ - خر و$$

اور نیز

ان دونوں مساواتوں کو بہ اور لہ کے لحاظ سے تفریق کریں تو

$$ف (لا + خر ما) - ف (لا - خر ما) = \left( \frac{خر جف ما}{جف بہ} + \frac{جف ۶}{جف بہ} \right) - \left( \frac{خر جف ما}{جف بہ} - \frac{جف ۶}{جف بہ} \right)$$

$$ف (لا + خر ما) + ف (لا - خر ما) = \left( \frac{خر جف ما}{جف لہ} + \frac{جف لا}{جف لہ} \right) + \left( \frac{خر جف ما}{جف لہ} - \frac{جف لا}{جف لہ} \right)$$

$$ف (لا - خر ما) - ف (لا + خر ما) = \left( \frac{خر جف ما}{جف بہ} - \frac{جف لا}{جف بہ} \right) - \left( \frac{خر جف ما}{جف بہ} + \frac{جف لا}{جف بہ} \right)$$

$$ف (لا - خر ما) + ف (لا + خر ما) = \left( \frac{خر جف ما}{جف لہ} - \frac{جف لا}{جف لہ} \right) + \left( \frac{خر جف ما}{جف لہ} + \frac{جف لا}{جف لہ} \right)$$

پہلی اور چوتھی مساواتوں کو ضرب دیکر اس میں دوسری اور تیسری کا حاصل ضرب جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ف (لا + خر ما) ف (لا - خر ما) = \left( \frac{خر جف ما}{جف لہ} \times \frac{جف لا}{جف بہ} + \frac{جف لا}{جف لہ} \times \frac{جف ما}{جف بہ} \right) - \left( \frac{خر جف ما}{جف لہ} \times \frac{جف لا}{جف بہ} - \frac{جف لا}{جف لہ} \times \frac{جف ما}{جف بہ} \right)$$

$$= \frac{جف ۶}{جف بہ} \times \frac{جف ۶}{جف لہ} + \frac{جف ۶}{جف بہ} \times \frac{جف و}{جف لہ} + \frac{جف و}{جف بہ} \times \frac{جف ۶}{جف لہ} + \frac{جف و}{جف بہ} \times \frac{جف و}{جف لہ}$$

چونکہ (لا + خر ما) ہم شکل تعبیر ہے اس لیے شرط (۲) کی بنا پر دائیں طرف کا جملہ ضربت۔ پس بائیں طرف کا جملہ بھی صفر ہونا چاہئے۔

پھر دوسری اور آخری مساواتوں کو ضرب دینے سے

$$ف (لا + خر ما) ف (لا - خر ما) = \left[ \left( \frac{خر جف ما}{جف لہ} \right)^2 + \left( \frac{جف لا}{جف لہ} \right)^2 \right]$$



$$\left(\frac{\text{جف } ۶}{\text{جف } ۲}\right) + \left(\frac{\text{جف } ۲}{\text{جف } ۲}\right) =$$

او پہلی اور تیسری مساواتوں کو ضرب دینے سے

$$\left[ \left(\frac{\text{جف } ۱۰}{\text{جف } ۲}\right) + \left(\frac{\text{جف } ۲}{\text{جف } ۲}\right) \right] (\text{لا} - \text{خا}) =$$

$$\left(\frac{\text{جف } ۶}{\text{جف } ۲}\right) + \left(\frac{\text{جف } ۲}{\text{جف } ۲}\right) =$$

اس لیے (۳) سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ

$$\left\{ \left(\frac{\text{جف } ۶}{\text{جف } ۲}\right) + \left(\frac{\text{جف } ۲}{\text{جف } ۲}\right) \right\} = \text{جم } ۲$$

اس طرح حسب ذیل اہم مسئلہ ثابت ہوتا ہے :-  
اگر بہ ل کے کوئی تفاعل لا، ما ہوں جن سے کرہ کی سطح کی ہم شکل تعبیر  
ایک مستوی پر حاصل ہوتی ہے تو محدود، و بھی جن کی تعریف شکل

(۵۲)

$$\text{ف} (\text{لا} \pm \text{خا}) = \pm ۶ \text{ خو}$$

کی کسی مساوات سے ہوئی ہو بہ ل کے ساتھ ہم شکل تناظر میں ہوں گے -

مثال - اگر کرہ پر کے نقطوں کی ہم شکل تعبیر کے لیے لا اور مانوہ

لا = جم ل، ما = ۶ جب ل کے تفاعل ہوں جہاں ع، بہ کا ایک تفاعل ہے تو  
ہم شکل تعبیر کے لیے جو عام شرطیں اوپر بیان کی گئی ہیں ان سے ثابت کرو کہ

$$۶ = \text{مس} \left( \frac{\pi}{۲} \pm \frac{\pi}{۲} \right)$$

لا اور ما کی بجائے ان کے جملے درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات

(۲) متشابہ پوری ہوتی ہے اور مساوات (۳) تخیل ہو کر

$$۶ = \text{جم } ۲ \left( \frac{\text{جب } ۶}{\text{جف } ۲} \right)$$

ہو جاتی ہے -

## ۱۹۔ ہم شکل تعبیر میں پیمانہ -

ہ کی ہندسی ہیئت (نقشہ) قابل یادداشت ہے۔ اس کو زیر بحث  
 ظل کا پیمانہ کہتے ہیں کیونکہ مساواتوں (۱) میں سے پہلی مساوات سے  
 جس میں  $h$  کو  $h'$  اور  $l$  کو  $l'$  کیا گیا ہے یہ ظاہر ہے کہ وہ جزو ضربی ہے  
 جسے کرہ پر کی کسی چھوٹی قوس پر لگانا ہو گا تاکہ ظل پر متناظر قوس کا ظل حاصل ہو  
 ہو سکے (یعنی اصل کرٹکے لیے ہم) (چونکہ ظل ہم شکل ہے) کرہ پر نقطہ  
 کے قریب کسی چھوٹی قوس کا مقابلہ ظل پر کی متناظر قوس کے ساتھ کر سکتے  
 ہیں۔ ہم سادہ ترین صورت کے طور پر طول  $h$  کی ایک چھوٹی قوس لینے  
 جو نقطوں  $(\lambda, \phi)$  اور  $(\lambda + h, \phi)$  کے درمیان ہے۔ تب (۱) سے حاصل  
 ہوتا ہے

$$h' = \left( \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ہ}} \right) h + \left( \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ہ}} \right) h' = h' \left( \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ہ}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ہ}} \right)$$

اس سے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:-  
 اگر ایک نقطہ کے قائم مستوی محدود لا، ما ہوں جو کسی ہم شکل نقشہ  
 میں نصف قطر  $h$  کے کرہ پر کے نقطہ  $h'$  کو تعبیر کرتا ہے تو وہ پیمانہ  
 یا جزو ضربی

$$\frac{1}{h} \left\{ \left( \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ہ}} \right) + \left( \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ہ}} \right) \right\}$$

ہے جسے کرہ پر کی ہر چھوٹی قوس پر لگانا ہو گا تاکہ اس سے ظل میں متناظر  
 چھوٹا خط حاصل ہو۔

## ۲۰۔ مرکیٹر (Mercator) کا ظل -

(۵۴)

اب ہم کرہ کی اس تعبیر پر غور کریں گے جو ”مرکیٹر کے ظل“ کے نام سے  
 مشہور ہے اور جو جہاز رانی میں بہت مفید ہے۔ اس ظل کی اہم خصوصیتیں

یہ ہیں:-  
 (۱) نقشہ پر کے کسی نقطہ کا فاصلہ 'کرہ' پر کے متناظر نقطہ کے طول بلد کے راست متناسب ہوتا ہے۔  
 (۲) نقشہ پر کے کسی نقطہ کا معین 'کرہ' پر کے متناظر نقطہ کے عرض بلد کا ایک تفاعل ہوتا ہے (لیکن طول بلد کا تفاعل نہیں ہوتا)۔  
 (۳) نقشہ کرہ کی ہم شکل تعبیر ہوتا ہے۔  
 پہلی شرط لا = ۹۰ سے بیان ہوتی ہے۔ دوسری شرط کو ظاہر کرنے کے لیے ہم ما = ف (یہ) رکھتے ہیں اور تیسری شرط کو پورا کرنے کے لیے ف کو ایک ایسا جملہ ہونا چاہئے کہ تعبیر ہم شکل ہو۔ اگر ما کو یہ کے صرف متناسب لیا جائے تو ظل ہم شکل نہیں ہوگا۔  
 دفعہ (۱۸) کی بنیادی شرطیں (۲) اور (۳) پوری ہونی چاہئیں۔

چنانچہ

جف لا = ۰، جف لا = ۹۰، جف ما = ف (یہ) جف ما = ۰  
 جف بہ = جف لہ  
 ان قیمتوں کو درج کرنے سے دفعہ (۱۸) کی مساوات (۲) متماثلًا صفر ہوتی ہے اور مساوات (۳) ہو جاتی ہے

$$۹۰ = \text{جم}^2 \text{ بہ } [ف (یہ)]^2$$

اور اس لیے  $\frac{\text{فر} (یہ)}{۹۰} = \pm \text{ہ قط بہ}$

اگر ہم چاہیں کہ ما کی مثبت سمت 'کرہ' پر شمالی سمت کے جواب میں ہو تو اوپر کی علامت (+) یعنی چاہئے۔ پس

$$ف (یہ) = ۹۰ \text{ لوک } \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) + \text{مستقل}$$

اس مستقل کو صفر کے مساوی بنایا جاسکتا ہے کیونکہ اس صورت میں نقشہ پر

خط استواء کے نقطوں کے لیے مبین صفر ہو جاتے ہیں۔ اس طرح وہ اس کی مسئلہ معلوم ہو جاتا ہے جس پر مرکبٹر کے ظل کا انحصار ہے، اس مسئلہ کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے :-  
اگر کرہ پر کسی نقطہ کے طول بلد اور عرض بلد لہ، یہ ہوں تو قائم

محدود

$$\text{لا} = \text{ھ} \text{ لہ} ، \text{ما} = \text{ھ} \text{ لوک مس} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

سے ایک نقشہ بنایا جاسکتا ہے جو کرہ کے ساتھ ہم شکل ہوگا۔  
(۵۵) یہاں لہ کو نیم قطری زاویوں میں بیان کیا گیا ہے اور استعمال کو کا رقم نیپیری ہے۔ لیکن سہولت اس میں ہوگی کہ اوپر کی مساواتوں کو اس طور پر تبدیل کیا جائے کہ لہ حسب معمول طول بلد کے درجوں میں بیان ہو جائے اور لوکا رقم عام لوکا ریموں میں مقیاس ۳۴۳۴۳ کی مدد سے تبدیل ہو جائیں۔ ان تبدیلیوں کو عمل میں لانے سے

$$\text{لا} + \frac{\pi \pi 2}{360} \text{ لہ} ، \text{ما} = \frac{\text{ھ}}{34343} \text{ لوک مس} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

اب ھ کی بجائے ایک نیا مستقل ھ ایسا رکھو کہ  $360 \times 34343 = 360 \times 34343$  تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \text{ھ} \text{ لہ} ، \text{ما} = 132 \text{ لوک مس} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \dots (1)$$

جہاں لہ درجوں میں ہے اور معمولی لوکا رقم استعمال کئے گئے ہیں۔  
مثال ۱۔ ثابت کرو کہ مرکبٹر کے ظل

$$\text{لا} = \text{ھ} \text{ لہ} ، \text{ما} = \text{ھ} \text{ لوک مس} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

میں بیان ہوتا ہے۔ ۱

مثال ۲۔ اگر بحر اوقیانوس کے مرکبٹری نقشہ میں شمالی عرض بلد

۲. کا تواری خط استواء سے ۱۸۵ ملی میٹر پر ہو تو ۲۰ کے تواری کا فاصلہ کیا ہونا چاہئے اور خط استواء پر ۵۰ کا طول کیا ہوگا۔

$$185 = 132 = \text{لوک مس} \left( \frac{90}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

اس لیے  $185 = 132$  اور نقشہ کی مساوات ہے

$$275 = \text{۲۷۵ ملی میٹر} \times \text{لوک مس} \left( \frac{90}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

اس میں یہ ۲۰ رکھنے سے  $38 = 275$  ملی میٹر حاصل ہوتا ہے۔  
پھر چونکہ  $185 = 132$  اس لیے سوال کے دوسرے حصہ کا جواب  
 $93 = 50 \times 185$  ملی میٹر

۳۔ مثال ۳۔ مرکبیری نقشہ میں

$$M = \text{لوک مس} \left( \frac{90}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$M = \text{لوک مس} \left( \frac{90}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{کی بجائے}$$

لینے سے کیا فرق پڑ جائے گا۔

مثال ۴۔ اگر عرض بلد پر پروجیٹی ارضی قوس سے ہو اور اگر اس کا مرکبیری  
خلل سے ہو تو ثابت کرو کہ یہ میں سے گزرتے ہوئے عرض بلد کے ارضی دائرہ  
کے طول اور قطب کے خط استواء کے طول میں نسبت میں ۱:۲ ہے۔

مثال ۵۔ مرکبیری خلل میں ثابت کرو کہ بحری (Nautical)

میل (جو مساوی ہے آ عرض بلد) کا طول ایسے بدلتا ہے جیسے عرض بلد کا قاطع  
(قط)

مثال ۶۔ ساحلی جہاز رانی میں مرکبیری نقشوں کا عملی فائدہ یہ  
ہے کہ ملاح جب یہ معلوم کرنا چاہتا ہے کہ دو نقطوں ۱ اور ۲ میں کتنے بحری  
میل (قوس کے منٹوں) کا فاصل ہے تو وہ اپنے گنیوں کے سروں کو نقشہ کے

اُن نقطوں پر رکھتا ہے جو  $\alpha$  اور  $\beta$  کے متناظر ہیں اور پھر اُسے اٹھا کر  $\alpha$  اور  $\beta$  کے عرض بلد کے قریب اُسی نقشہ کے حاشیہ پر عرض بلد کے لیے جو درجہ بندی ہے (۵۶) اُس پر منطبق کر کے مطلوبہ فصل معلوم کر لیتا ہے۔ اُس کے اس طریق پیمائش کا جواز ثابت کرو۔

نقشہ چونکہ ہم شکل ہے اور کرہ کے صرف ایک چھوٹے حصہ کو تعبیر کرتا ہے اس لیے ہم اُسے اس طور پر استعمال کر سکتے ہیں کہ گویا نقشہ پر کا ہر فاصلہ (بشمول عرض بلدوں کے پیمانہ کے) کرہ پر کے متناظر فاصلہ کے ٹھیک متناسب ہے۔ لیکن زمین کے مختلف حصوں کو تعبیر کرنے والے نقشوں پر عرض بلد کے منٹ طول میں بالعموم مختلف ہوں گے اگرچہ یہ نقشے ایک ہی مرکبٹری ٹیل کے مختلف حصے ہوں۔ اس لیے ملاح کو چاہئے کہ وہ اپنا فاصلہ متعلقہ نقشہ سے اور تقریباً اُسی عرض بلد سے محسوب کرے جو اُن نقطوں کا ہے جن کا فاصلہ وہ پیمائش کر رہا ہے۔

مثال ۷۔ ثابت کرو کہ مرکبٹری نقشہ پر کیمبرج (عرض بلد  $52^{\circ} 12'$ ) کے گرد عرض بلد کے ایک درجہ کا طول اُس طول کا  $25.04$  گنا ہے جو خط استوا پر طول بلد کے ایک درجہ کا ہے۔

ضابطہ (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر خط استوا پر طول بلد کے ایک درجہ کا طول  $60$  ہو تو عرض بلدوں پر، اور ہم کے توازیوں کا درمیانی فاصلہ مرکبٹری نقشہ پر یہ ہے

$$132 = \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \text{ لوک مس} - \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \text{ لوک مس} \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

اب یہ کی بجائے  $52^{\circ} 12'$  اور ہم کی بجائے  $52^{\circ} 12'$  رکھنے سے یہ جملہ ہو جاتا ہے  $25.04$ ۔

مثال ۸۔ ثابت کرو کہ مرکبٹری نقشہ پر کسی بڑے دائرہ کی کوسیم کی مساوات ہمیشہ شکل

$$2 \text{ جب } \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \text{ کو } \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$



تو اس کے راستہ کو ہم مساوی المیلان (Loxodrome) کہینگے۔ انگریزی میں اس کا دوسرا نام (Rhumb-line) بھی ہے۔ اگر طول بلد لہ اور عرض بلد بہ ہو اور اگر طہ وہ زاویہ ہو جس پر یہ منحنی خط متواتر نصف النہاروں کو قطع کرتا ہے تو مساوی المیلان کی تفریق مساوات ہوگی

$$\text{مس طہ} = \text{جم بہ فر لہ} \backslash \text{فر بہ}$$

$$\text{اس لیے (تخل سے) لہ} = \text{مس طہ لوک پو} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) + \text{مستقل}$$

اگر ہم لہ کی اس قیمت کو مرکبڑی نطل

$$\text{لا} = \text{لہ} \text{، ما} = \text{لہ لوک پو} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right)$$

میں درج کریں تو حاصل ہوتا ہے

لا = ما مس طہ = مستقل  
جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مساوی المیلان کا مرکبڑی نطل ایک خط مستقیم ہے جو نصف النہاروں کے نطلوں کو اُسی زاویہ پر قطع کرتا ہے جس پر مساوی المیلان کرہ کی سطح پر نصف النہاروں کو قطع کرتا ہے۔ مساوی المیلان کے مرکبڑی نطل کی یہ خاصیت جہاز رانی میں زیادہ اہمیت رکھتی ہے کیونکہ جب ملاح مرکبڑی نقشہ پر کے دو نقطوں کو ایک خط مستقیم سے ملاتا ہے تو وہ مستقل زاویہ جس پر یہ خط نصف النہاروں کے نطلوں کو قطع کرتا ہے اُس سمت کا انہار کرتا ہے جس میں اُسے ایک مقام سے دوسرے مقام تک جانا ہوگا۔

مثال ۱۔ اگر کسی کرہ کا نصف قطر ہو اور طہ وہ مستقل زاویہ ہو جس پر مساوی المیلان نصف النہاروں کو قطع کرتا ہے اور اگر بی وہ محور ہو جو مرکز کو شمالی قطب سے ملاتا ہے اور محاورہ لا اور ما وہ نصف قطر ہوں جو خط استواء پر کے اُن نقطوں سے کھینچے گئے ہیں جن کے طول بلد علی الترتیب



۹۰ اور ۹۱ میں تو ثابت کرو کہ مساوی المیلان کی مساواتیں ہیں

ر مس طہ فری + ما فرلا - لافرما = ۰

لا + ما + ی = ۲

مثال ۲ - اگر کرہ کا نصف قطر ہو اور طہ وہ مستقل زاویہ ہو جس پر نصف النہار مساوی المیلان کو قطع کرتے ہیں اور اگر مساوی المیلان کی اس قوس کا طول س ہو جس کے سروں کے عرض بلد یہ، ہم میں تو ثابت کرو کہ

ر (ہم - یہ) = س جم طہ

مثال ۳ - اگر زمین کو ایک کرہ غما سجا جائے جو چھوٹے خروج مرکز کے ایک قطع ناقص کو اس کے محور اصغر کے گرد گھمانے سے بنا ہے تو ثابت کرو کہ کسی نقطہ کے طول بلد لہ اور عرض بلد یہ میں رشتہ جبکہ یہ نقطہ اس مساوی المیلان پر واقع ہو جو نصف النہاروں کو مستقل زاویہ طہ پر قطع کرتا ہے حسب ذیل ہے

$$لہ = مس طہ \left\{ لوک مس \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) - ز جب یہ \right\} + مستقل$$

اگر قطع ناقص میں اس نقطہ کا نصف قطر انحراف مس ہو اور قطع ناقص اور محور اصغر کے درمیان عماد پر مقطوعہ سہا تو

(۵۸)

$$سہا = \frac{1}{\sqrt{1 - ز جب یہ^2}} ، س = \frac{سہا^3}{(1 - ز^2)}$$

اور مساوی المیلان کی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{فرلہ}{فر یہ} = \frac{ر مس طہ}{س مس طہ} = \frac{ز مس طہ جم طہ}{س مس طہ جم طہ} تقریباً$$

مثال ۴ - ثابت کرو کہ مرکزی نقشہ چس میں طول کی اکائی استوائی طول بلد کا آلیگٹی ہے عرض بلد یہ کے توازی کا شعاعیں

$$۹۱۶ لوک مس \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) - ۳۴۳۸ لہ جب یہ$$

ہوگا جہاں ز اُس قُصع ناقص کا خروج المکرز ہے جو زمین کی نصف النہاری تراش لینے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۳ سے ہم دیکھتے ہیں کہ ظل کا نقطہ لا، جو نقطہ لہ کے جواب میں ہے حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \text{لہ}$$

$$\{ \text{لوکس} (\frac{77}{4} + \frac{7}{4}) - \text{ز} \} \text{جب یہ}$$

چونکہ لہ دائری ناپ میں ہے اس لیے  $38^\circ 34' 38''$  اور  $38^\circ 34' 38''$  رکھنے سے لا، نقطوں میں حاصل ہوتا ہے۔

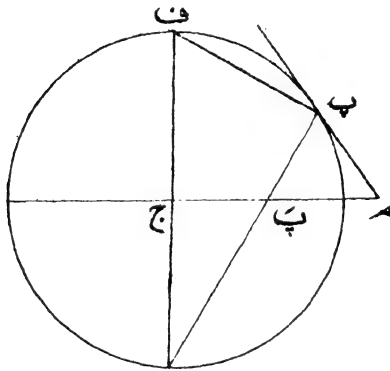
## ۲۲۔ تسطیحی اظلال۔

کرہ پر کے نقطوں کو ہم شکل ظل کے ذریعہ تعبیر کرنے کے اہم ترین طریقوں میں سے ایک طریقہ وہ ہے جو تسطیحی اظلال کے حور پر مشہور ہے۔ اس کی تفصیل حسب ذیل ہے۔

کرہ پر کوئی نقطہ و، ظل کے مبداء کے طور پر منتخب کیا جاتا ہے، اب ظل کا مستوی اُس بڑے دائرہ کا مستوی یا اس کے متوازی کوئی مستوی لیا جاتا ہے جس کا قطب و ہو۔ اگر کرہ پر کوئی دوسرا نقطہ پ ہو اور و پ ظل کے مستوی کو پ میں قطع کرے تو ہم کہیں گے کہ پ کا تسطیحی ظل پ ہے۔ مستوی و پ پ ج کھینچو جہاں ج کرہ کا مرکز ہے۔ پ پ کا ماس مستوی، ظل کے مستوی کو ایک خط میں قطع کریگا جو ہ میں سے گذرتا ہے اور کاغذ کی سطح پر عمود ہے۔ فرض کرو کہ اس خط پر کوئی نقطہ ہر ہے۔ اب یہ ثابت کرنے کے لیے کہ ایسے ظل سے ہم شکل تعبیر حاصل ہوتی ہے ہم پ میں سے گذرنے والی کوئی قوس لیتے ہیں اور نصف النہار کے ساتھ اس کا جو میلان ہے اُس پر اور ظل میں اسکے متناظر عوزاویہ ہے اُس پر غور کرتے ہیں۔ دائرہ کی خاصیتوں سے  $\text{ہ پ} = \text{پ ہ}$  اور ایسے  $\text{ہ پ} = \text{ہ پ}$

پس مثلثات  $\Delta$  پ پ م اور  $\Delta$  پ م م مسادی ہیں اور اس لیے زاویہ  $\Delta$  پ م م = زاویہ  $\Delta$  پ پ م۔ لیکن زاویہ  $\Delta$  پ م م، کرہ پر کے دو دائروں کا زاویہ تقاطع ہے اور زاویہ  $\Delta$  پ پ م، ان کے ظلوں کا زاویہ تقاطع ہے۔ اس لیے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

تسطیعی ظل کے ہم شکل ہونے کا سادہ ترین ثبوت شاید یہ ہے:  $\Delta$  پ پ کے کسی خطی عنصر (Line-element) اور پ پ کے متناظر خطی عنصر میں نسبت  $\frac{پ پ}{و پ}$  ہے، اس کو متشابہ مثلثوں کے ذریعہ آسانی کے ساتھ ثابت کیا جاسکتا ہے۔ اب یہ واقعہ کہ یہ نسبت خطی عنصر کی سمت پر منحصر نہیں ہے ثابت کرتا ہے کہ یہ تعبیر ہم شکل ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ  $\frac{پ پ}{و پ}$  ہیما نہ ہے۔



شکل (۱۹)

یہ ثابت کرنا آکا ہی بخش ہو گا کہ تسطیعی ظل مرکبہری ظل سے کس طرح دفعہ ۱۸ کے اصول کے ذریعہ ماخوذ کیا جاسکتا ہے یعنی اگر  $و = ف + خ$  (لا + خ) تو

مہ دوں ۷، ۸ سے ایک ایسی تعبیر ملتی ہے جو لا، ما سے حاصل ہونے والی  
تعبیر کے ہم شکل ہے۔  
مرکبہ کی شکل میں

$$لا = ھ ل، ما = ھ لوک مس \left( \frac{۷}{۲} + \frac{۱۱}{۳} \right)$$

$$\text{اس لیے } خر (لا + خر) = \frac{لا + خر}{ھ} = \text{لوک مس} \left( \frac{۷}{۲} - \frac{۱۱}{۳} \right) + خر ل$$

$$\text{اور اس لیے } لو و = \frac{خر (لا + خر)}{ھ} = \text{مس} \left( \frac{۷}{۲} - \frac{۱۱}{۳} \right) + \text{جم ل} + خر ل \text{ مس} \left( \frac{۷}{۲} - \frac{۱۱}{۳} \right) \text{ جب ل}$$

وائیں جانب کا رکن، لا + خر ما کا ایک تفاعل ہے اور اس لیے دفعہ ۱۸ کی (۶۰)  
نوٹ سے

$$۷ = \text{مس} \left( \frac{۷}{۲} - \frac{۱۱}{۳} \right) + \text{جم ل} \text{ اور } ۷ = \text{مس} \left( \frac{۷}{۲} - \frac{۱۱}{۳} \right) \text{ جب ل}$$

بھی ایک ہم شکل تعبیر کے تحت دیں، اور یہ دکھانا آسان ہے کہ یہ محدود طبیعی شکل  
کے ہیں کیونکہ اگر خط استواء کے مستوی کو ظل کا مستوی لیا جائے تو شکل ۱۹ میں

$$\text{زاویہ ف و پ،} \left( \frac{۷}{۲} - \frac{۱۱}{۳} \right) \text{ ہے اور}$$

$$\text{ج پ} = \text{ج و مس} \left( \frac{۷}{۲} - \frac{۱۱}{۳} \right)$$

اگر پ کا طول بلد ل ہو تو ج پ کے ظل، صفر طول بلد کی سمت میں اور اسکے  
علی القوائم سمت میں، علی الترتیب حسب ذیل ہیں

$$\text{ج و مس} \left( \frac{۷}{۲} - \frac{۱۱}{۳} \right) + \text{جم ل} \text{ اور ج و مس} \left( \frac{۷}{۲} - \frac{۱۱}{۳} \right) \text{ جب ل}$$

ہم دفعہ ۱۹ کے ضابطوں سے کرہ پر کے نقطہ ب، لہ پر طبیعی ظل

کا پیمانہ متعین کر سکتے ہیں جبکہ ظل کی تعریف مساواتوں

$$\text{لا} = \text{اجم لہ مس} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \text{ما} = \text{اجب لہ مس} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

کے ذریعہ کی گئی ہو جس میں بنیادی دائرہ کا ضد شطب راس کے طور پر لیا گیا ہے (یعنی ظل کے مبداء کے طور پر) اور 'ا' کرہ کا نصف قطر ہے۔ پس

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}} = \frac{\text{اجم لہ}}{\text{اجب بہ}} = \frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}} = \frac{\text{اجب لہ}}{\text{اجب بہ}}$$

اور اسیلے

$$\frac{1}{\text{اجب بہ}} = \left\{ \left( \frac{\text{جف لا}}{\text{جف بہ}} \right) + \left( \frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}} \right) \right\} \frac{1}{\text{اجب بہ}}$$

مثال ۱۔ کرہ پر کے نقطہ بہ 'ا' پر پیمانہ کی قیمت تسطیحی ظل کے لیے معلوم کرو جبکہ بنیادی دائرہ کے اوپر راس نقطہ لہ = ۱۸۰° بہ = ۰° پر ہو اور ظل کی تعریف مساواتوں

$$\text{لا} = \frac{\text{اجم بہ جب لہ}}{\text{اجم بہ جم لہ}} = \text{ما} = \frac{\text{اجب بہ}}{\text{اجم بہ جم لہ}}$$

کے ذریعہ کی گئی۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ زمین کے تسطیحی ظل میں زمین کے کسی نقطہ اور اس کے تحت قدمی نقطہ کے متناظر نقطے نقشہ کے مرکز کے ساتھ ہم خط ہونگے اور ایسے ہو گئے کہ نقشہ کے مرکز سے ان کے فاصلوں کا حاصل ضرب مستقل ہوگا۔

مثال ۳۔ فرض کرو کہ کرہ پر کے نقطہ بہ 'ا' کے جواب میں تسطیحی ظل کا نقطہ لا + مفا + ما + مفا ہے۔ ثابت کرو کہ مفا لا + مفا ما + مفا لہ (۶۱)

$$\text{مفا لہ} = \text{ما مفا لہ} - \text{لا قاط بہ مفا بہ}$$

$$\text{مفا ما} = \text{لا مفا لہ} - \text{ما قاط بہ مفا بہ}$$

مثال ۴۔ دنیا کے نقشہ کو تین حصوں میں بنانا مقصود ہے

جن میں سے دو حائط قطبی ہوں تسطیحی ظل پر اور ایک 'اُستوائی' ہو مرکزِ ٹری ظل پر۔  
حائط قطبی نقشے ایسے ہونے چاہئیں کہ عرض بلد میں پیمانہ وہی ہو جو دوسرے  
مرکزِ ٹری نقشہ میں خط استواء پر ہے، نیز حدودی عرض بلد فہ پر پیمانہ تینوں نقشوں  
کے لیے ایک ہی ہو۔ ثابت کرو کہ

۲ مس فہ = (۱ + جب عہ) = جب عہ (۲ + جب عہ)  
اور یہ کہ عرض بلد فہ میں پیمانہ اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ خط استواء پر کے  
پیمانہ کو

$$1 + \frac{\text{جب } ۲ \text{ عہ}}{(۱ + \text{جب عہ})^۲}$$

سے ضرب دیا جائے۔

اُن پیمانوں سے جو دفعہ ۲۰ مثال ۱ اور دفعہ ۲۲ میں مرکزِ ٹری اور تسطیحی  
ظُلوں کے لیے ثابت کئے گئے ہیں ہمیں علی الترتیب حاصل ہوتا ہے  
 $\frac{۱}{۱} \text{ (۱ + جب عہ)} = \frac{۱}{۱} \text{ ' ۱' (۱ + جب فہ)} = \frac{۱}{۱} \text{ قَط فہ}$   
 ان دو مساواتوں سے  $\frac{۱}{۱}$  کو ساقط کرنے سے

$$\text{مس فہ} + \sqrt{۱ + \text{مس فہ}} = ۱ + \text{جب عہ}$$

اس مساوات کو فہ کے لیے حل کرو تو مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔  
عرض بلد فہ پر کے پیمانہ کو خط استواء پر کے پیمانہ سے جو نسبت ہے  
وہ قَط فہ ہے اور

$$\text{قَط فہ} + \sqrt{۱ - \text{قَط فہ}} = ۱ + \text{جب عہ}$$

کو حل کرنے سے قَط فہ مثال میں مندرجہ شرط کے مطابق حاصل ہوتا ہے۔

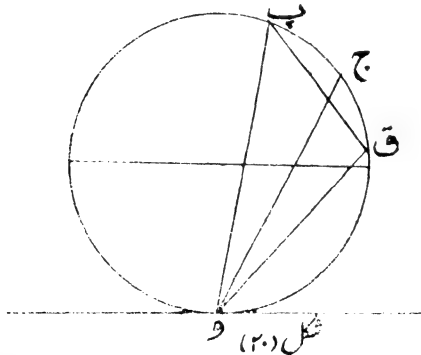
۲۳۔ کرہ پر کے کسی دائرہ کا تسطیحی ظل بھی ایک دائرہ ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ کرہ پر دائرہ کا مرکز ج ہے۔ ظل کے مبداء کرہ کے مرکز

اور ج میں سے گذرتا ہوا ایک مستوی کھینچو۔  
فرض کرو کہ اس مستوی اور دائرہ کے مستوی کا خط تقاطع پ ق  
ہے۔ وہ مخروط جس کی چوٹی و ہے اور جو دائرہ کے محیط کے سب نقطوں میں  
گذرتا ہے ضرور ہے کہ اس کا محور و ج ہو کیونکہ ج پ = ج ق اور  
اس لیے زاویہ ج و پ = زاویہ ج و ق۔ یہ ہر اس مستوی کے لیے  
درست ہونا چاہئے جو و ج میں سے گذرتا ہے اور یہ صرف اسی صورت  
میں ممکن ہے جبکہ و ج مخروط کا محور ہو۔

ہر مخروط دائری تراش کے دو مستوی رکھتا ہے جو محور کے  
ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں اور جن کا خط تقاطع محور پر عمود وار ہوتا  
ہے۔ ج اور و پر کمرہ کے مماس مستوی، ج و کے ساتھ مساوی زاوے  
بناتے ہیں اور ان کا خط تقاطع، ج و پر عمود ہے۔ لیکن ج پر کا مماس مستوی  
ایک دائری تراش پ ق کے متوازی ہے اور اس لیے و پر کا مماس  
مستوی دوسری دائری تراش کے متوازی ہونا چاہئے۔ اس طرح شیطیل  
کی بنیادی خاصیت ثابت ہو جاتی ہے۔

(۹۲)



شکل (۲۰) و

چونکہ ایک مخروط، دائری تراشوں کے صرف دو نظامات رکھتا  
ہے اس لیے سوائے ان مستویوں کے جو و پر کے مماس کے متوازی ہوں

کوئی دوسرے مستوی نہیں ہو سکتے جو تسطیحی ظل کی امتیازی خصوصیات رکھتے ہوں۔

یہ مسئلہ حسب ذیل طریقہ پر بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔  
 کرہ کو دائرے کے محیط پر مس کرنے والے مخروط کا ہر کون دائرہ اُس حاس پر عمود ہے جو نقطہ حاس پر کھینچا گیا ہو۔ نقطہ حاس پر کون کے چھوٹے حصوں کے متعلق یہ تصور کیا جاسکتا ہے کہ وہ کرہ پر واقع ہیں۔ ظل میں یہ مخروط ایک نقطہ میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم کی ایک منسل بنجاتا ہے اور چونکہ ظل میں زاویے وہی رہتے ہیں اس لیے دائرہ کا ظل ایک ایسا منحنی ہونا چاہئے جو ان تمام خطوط مستقیم کو علی القوائم قطع کرے یعنی دوسرا دائرہ۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ تسطیحی ظل میں کرہ پر کے کسی دائرہ کے مرکز کا ظل متناظر دائرہ کامرکز ہوتا ہے اگر اصلی دائرہ کے قطراتے چھوٹے ہوں کہ انہیں خطوط مستقیم تصور کیا جاسکے۔

چونکہ زاویے ظل میں بھی وہی رہتے ہیں اس لیے اصلی دائرہ میں بنایا ہوا کوئی قائم الزاویہ مثلث ظل میں بھی قائم الزاویہ مثلث رہتا ہے اور اس طرح دائرہ کے ہر قطر کا ظل متناظر دائرہ کا ایک قطر ہوتا ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ کرہ کی سطح پر کے کسی نقطہ کو ظل کا سیدھا قرار دیکر کرہ کا تسطیحی ظل لیا جائے تو نصف النہاروں کے کسی نظام کا ظل ہم محور دائروں کا ایک نظام ہوگا۔

(۶۳) مثال ۳۔ ثابت کرو کہ تسطیحی ظل میں کرہ پر کے ہم مرکز چھوٹے دائروں کے نظام کا ظل دائروں کا ایک نظام ہوتا ہے جن کے مرکز ہم خط ہوتے ہیں اور ان میں سے ہر دائرہ ہم محور دائروں کے وہی نظام کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔ کیونکہ ہم مرکز دائروں کے مرکز ج میں سے گزرنے والے تمام بڑے دائروں کی تغلیب ہم محور دائروں کے ایک نظام میں ہوتی ہے اور چونکہ تغلیب میں زاویے برقرار رہتے ہیں اس لیے ہم مرکز دائروں کے مقلوب ان ہم محور دائروں کو



علی القیام قطع کرنے چاہئیں اور ان کے مرکز اس خط پر واقع ہونے چاہئیں جو پرتا دائرہ وج کامقلوب ہے جہاں وظل کا مرکز ہے۔

## ۲۴۔ تطبیعی ظل کے لیے عام ضابطے۔

فرض کرو کہ تطبیعی ظل کے مبداء و کے محدود ۲۷۰، یہ ہیں اور فرض کرو کہ کسی دوسرے نقطہ پ کے محدود لہ، یہ ہیں جہاں ان دونوں نقطوں کے محدود ایک ہی درجہ دار بڑے دائرہ میں کے حوالے سے ہیں۔

فرض کرو کہ میں وہ بڑا درجہ دار دائرہ ہے جس کا شطب و ہے۔ فرض کرو کہ خط مستقیم و پ، میں کے مستوی کو پ میں قطع کرتا ہے۔ اس طرح پ کا تطبیعی ظل پ ہے اور ہم مان لیتے ہیں کہ مستوی میں پ کے محدود لا، ما ہیں۔ محور + لا کرہ کا وہ نصف قطر ہے جو کرہ کے مرکز سے، میں پر میں کے صعودی عقدہ تک کھینچا گیا ہے۔ محور + ما، میں پ کے نقطہ ۹۰ میں سے گذرتا ہے، اور یہ مان لیا گیا ہے کہ یہ عقدہ، میں اور میں دونوں پر درجہ بندی کا مبداء ہے۔

اب ہمیں یہ، لہ کی رقوم میں لا اور ما کے لیے جملے معلوم کرنا ہے۔ ہم اب کرہ کے مرکز سے حسب ذیل تین قائم محوران لیتے ہیں:-

محور + لا، نقطہ بہ = ر، لہ = ۰ تک

محور + ما، نقطہ بہ = ۰، لہ = ۹۰ تک

محور + ی، نقطہ بہ = ۹۰، لہ غیر متعین ہے

ان محوروں کے حوالے سے د، پ، پ کے محدود علی الترتیب حسب ذیل ہیں:-

و	لا	ما	ی
پ	۰	-	۱
پ	لا	ما	۱
پ	۱	۱	۱

اب چونکہ و، پ اور پ ہم خط ہیں اس لیے  
 $\frac{ا + جم + جب + لہ - لا}{جم + جب + لہ - لا} = \frac{ا + جم + جب + لہ - لا}{جم + جب + لہ - لا}$   
 ان مساواتوں کو لا اور ما کے لیے حل کرنے سے

$$لا = ا - \frac{جم + جب + لہ}{جم + جب + لہ - لا} \quad (۱) \dots$$

$$ما = ا - \frac{جم + جب + لہ}{جم + جب + لہ - لا} \quad (۲) \dots$$

(۶۴)

اگر و، س کا شطب ہو تو یہ = ۹۰ اور اس لیے

$$لا = ا - \frac{جم + جب + لہ}{جم + جب + لہ - لا} \quad (۱) \dots$$

اگر و، س کا شطب ہو تو یہ = ۹۰ اور اس لیے

$$لا = ا - \frac{جم + جب + لہ}{جم + جب + لہ - لا} \quad (۱) \dots$$

اگر و، س پر واقع ہو تو یہ = ۰ اور اس لیے

$$لا = ا - \frac{جم + جب + لہ}{جم + جب + لہ - لا} \quad (۱) \dots$$

$$ما = ا - \frac{جم + جب + لہ}{جم + جب + لہ - لا} \quad (۱) \dots$$

ان ضابطوں میں ہم نے یہ مان لیا ہے کہ س پر درجہ بندی کا صفر  
 س پر س کے صعودی عقدہ کے ساتھ منطبق ہوتا ہے۔ اگر درجہ بندی کا  
 صفر کہیں اور ہو تو فرض کرو کہ اس صعودی عقدہ کا طول بلد ط ہے۔ تب  
 ضابطوں (۱) اور (۲) میں لہ کی بجائے لہ - ط رکھنا چاہئے اور اس لیے

$$لا = ا - \frac{جم + جب + لہ - ط}{جم + جب + لہ - لا} \quad (۳) \dots$$

ما = ۱۔ جب یہ حجم بہ + حجم یہ جب (لہ۔ طا) ... (۴)

۱۔ جب یہ جب بہ + حجم یہ جب (لہ۔ طا) ضابطوں (۱) اور (۲) یا (۳) اور (۴) کے ذریعہ کم لا اور صا کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں جبکہ لہ اور بہ دے گئے ہوں اور اس طرح قائم محدودوں کے ذریعہ کرہ پر کسی شکل کا تسطیحی نقشہ بنایا جاسکتا ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ اگر تسطیحی ظل بنیادی دائرہ کے شطب سے ہو اور محور + لا نقطہ لہ = ۰، بہ = ۰ سے کرہ کے مرکز تک اور محور + ما نقطہ لہ = ۹۰ بہ = ۰ سے کرہ کے مرکز تک ہو تو لا، ما، اور لہ بہ کے درمیان رشتے

ہیں۔ لا = اجم لہ مس  $(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})$  ما = اجم لہ جب (مس)  $(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})$

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اگر تسطیحی ظل بنیادی دائرہ کے ضد شطب سے ہو اور محور + لا مرکز سے نقطہ لہ = ۰، بہ = ۰ تک اور محور + ما مرکز سے نقطہ لہ = ۹۰ بہ = ۰ تک ہو تو لا، ما اور لہ بہ کے درمیان رشتے

ہیں۔ لا = اجم لہ مس  $(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$  ما = اجم لہ مس  $(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$

مثال ۲۔ اگر ظل کا مبدا، گرنیج پر ہو اور زمین کو کروئی مان لیا جائے تو بتاؤ کہ ضابطوں (۳) اور (۴) کے ذریعہ کش طرح اسٹریلیا کا تسطیحی نقشہ بنایا جاسکتا ہے۔

یہ کی بجائے گرنیج کا عرض بلد درج کرو اور یہ مان کر کہ طول بلد لہ گرنیج سے پائش کئے گئے ہیں طا = ۹۰ رکھو۔ اب اگر اسٹریلیا کے ساحل پر کسی نقطہ کے طول بلد اور عرض بلد لہ اور بہ ہوں تو (۳) اور (۴) سے متناظر مستوی قائم محدود لا اور ما متعین ہو جائیں گے اگر مستقل لا کو ایسی قیمت دی گئی ہو جو نقشہ کے مطلوبہ عرض دطول کے لحاظ سے سہولت بخش ہو۔

مثال ۴۔ اگر لہ بہ متغیر محدود سمجھے جائیں لیکن اس رشتہ کے

تحت کم

۱ جم له جم به + ب جب له جم به + ج جب به = .

جہاں ۱، 'ب'، ج مستقل ہیں تو (۳) اور (۴) سے ثابت کرو کہ وہ سب نقطے جو 'ا' سے تعبیر ہوتے ہیں ایک ہی دائرہ کے محیط پر واقع ہوں گے۔

۲۵۔ ایسا نقشہ بنانا جس میں کرہ پر کا ہر رقبہ نقشہ پرشای

رقبہ کے ذریعہ تعبیر ہو۔

اگر ایسے نقشہ پر تین نقطے (لا، ما، لا) (لا، ما، لا) (لا، ما، لا) ہوں تو وہ رقبہ جو ان کے اندر آتا ہے یہ ہے

۱۔ { لا (ما - مَ) + لا (ما - مَ) + لا (ما - مَ) } ..... (۱)  
 فرض کر دو کہ کرہ پر متناظر نقطے (بہ، لہ)، (بہ + ک، لہ) اور (بہ، لہ + ہ)  
 ہیں جہاں ک اور ہ چھوٹی مقداریں ہیں۔ وہ رقبہ جو ان نقطوں سے  
 کرہ پر حاصل ہوتا ہے  $\frac{1}{2} \times 1 \times 1$  ک + جم بہ ہے

نیز محدودوں لاء، مائے کے لیے جملے

لا + جف لا ک ، ما + جف ما ک  
جف ~ جف ~

اور محدودوں لاً، ما کے لیے چلے

$$= \frac{\text{جف ل}}{\text{جف له}} + \text{لا} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف له}} + \text{ما}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

پس (۱) میں انہیں درج کرنے سے مستوی میں رقبہ کے لیے حاصل

ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} \{ (لا + جف) - (جف - لا) \} + (لا + جف) = (لا + جف)$$
$$= \frac{1}{2} \text{ مک } \left( \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} \times \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} \times \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} \right)$$

رقبہ کے لیے یہ دو چلے جو حاصل ہوئے ہیں انہیں مساوی رکھنے اور یہ دیکھنے سے کہ تمام سطحیں ایسے ہی چھوٹے رقبوں سے حاصل کی جاسکتی ہیں ہم اس مسئلہ پر پہنچتے ہیں کہ اگر ایک کرہ کا مستوی نِظَل ایسا ہو کہ کرہ پر کے نقطہ لہ، یہ کے متناظر نقطہ کے محدود لا اور ما، شرط

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لہ}} \times \frac{\text{جف ما}}{\text{جف بہ}} - \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لہ}} \times \frac{\text{جف بہ}}{\text{جف لہ}} = \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لہ}} \quad (۲)$$

کو پورا کریں تو کرہ پر کا کوئی رقبہ مساوی رقبہ میں مستوی پر مُظَلل ہوگا۔

## تیسرے باب پر متفرق مثالیں

(۶۶)

مثال ۱۔ اگر ایک کرہ پر کے نقطوں کو کرہ کے مرکز سے ایک مستوی پر منسلک کیا جائے (Gnomonic Projection) تو دعوٰی کے اصولوں کے ذریعہ اس امر کا امتحان کرو کہ آیا یہ ظل ہم شکل ہے۔

مثال ۲۔ اگر کرہ کے ایک بڑے دائرہ پر موقوفہ کسی نقطہ کا طول بلد اور عرض بلد (ل، ف) ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ف} = \text{ا جم ل} + \text{ب جب ل}$$

جہاں ا اور ب مستقل ہیں۔ پھر اگر ہم رکھیں

$$(۱) \text{ لا} = \text{م ف جم ل}، \text{ ما} = \text{م ف جب ل}$$

$$(۲) \text{ لا} = \text{مس ف قطل}، \text{ ما} = \text{مس ل}$$

تو لا اور ما میں (یا لا اور ما میں) ایک خطی رشتہ حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے لا اور ما (یا لا اور ما) کو کارٹینری محدودوں کے طور پر مرتب کیا جائے تو تمام بڑے دائرے خطوط مستقیم ہوں گے۔

بتاؤ کرہ کا منطری ظل مستوی پر لینے سے یہ دو نقشے کس طرح تیار کئے جاسکتے ہیں۔

مثال ۳۔ زمین کی سطح پر ایک دائرہ کا زاوی نصف قطر سے اور اس کا مرکز ا عرض بلد یہ میں واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اگر شمالی قطب کو ظل کا مبدا لیکر خط استواء کے مستوی پر زمین کا سطحی ظل حاصل کیا جائے تو اس ظل میں مذکورہ بالا دائرہ ایک دائرہ (نصف قطر سے) سے تعبیر ہوگا جس کے مرکز کا فاصلہ اس نقطہ سے جو ا کو تعبیر کرتا ہے حسب ذیل ہوگا

$$\text{مس ل} = \frac{۱}{۲} \text{ مس } \left( \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right)$$

مثال ۴۔ کرہ کے اس ظل میں جو گاؤس سے منسوب ہے نصف الزہلہ

ایک نقطہ و میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم سے تعبیر ہوتے ہیں۔ ایسے کسی دو خطوں کا درمیانی زاویہ  $ھ$  لہ ہے جہاں لہ، متناظر نصف النہاروں کے طول بلدوں کا فرق ہے۔ عرض بلد کے توازی کو اُتری قوسوں سے تعبیر ہوتے ہیں جن کے مرکز و پر ہیں۔ اگر یہ تعبیر ہم شکل ہو تو ثابت کرو کہ اُس قوس کا نصف قطر جو عرض التمام  $ع$  کے جواب میں ہے  $ک$  (مس  $\frac{1}{2} ع$ ) ہو نا چاہئے جہاں  $ک$  مستقل ہے۔

ہیں مائل ہو نا چاہئے  $لا = جم$  (لالہ)  $ما = جب$  (ھ لا) جہاں  $ع$  عرض بلد کا ایک تفاعل ہے۔ دفعہ کی مساوات (۳) میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ھ ع^۲ = جم^۲ \quad \text{بہ} \quad \left( \frac{جف}{جف} \right)$$

مثال ۵۔ اگر

$$لا = ھ \left( \frac{ن}{۲} - ل \right) ، ما = ھ \text{ لوک مس} \left( \frac{ن}{۲} + \frac{ن}{۲} \right)$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ} \quad \text{مس} \frac{لا + خ ما}{۲} = ع + خ و$$

$$\text{جہاں} \quad ع = جم \text{ بہ} جم \text{ لہ} \quad (ا + جم \text{ بہ} جب \text{ لہ}) \quad و = جب \text{ بہ} (ا + جم \text{ بہ} جب \text{ لہ})$$

اور اس لیے بتاؤ کہ  $ع$  و ایسے محدود ہیں کہ ان سے ایک ہم شکل تعبیر حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۶۔ اگر کرہ پر کا نقطہ بہ، لہ ایک مستوی پر کے اُس نقطہ سے تعبیر ہو جس کے محدود (۶۷)

$$لا = جم \text{ بہ} جم \text{ لہ} ، ما = \frac{جب \text{ بہ}}{ا + جم \text{ بہ} جب \text{ لہ}}$$

ہیں ثابت کرو کہ کرہ پر کا ایک دائرہ جس کا نصف قطر  $س$  ہے اور مرکز بہ، لہ ہے مستوی پر ایک دائرہ سے تعبیر ہو گا جس کا نصف قطر  $جب$   $س$  (جم  $س$  + جم بہ جب لہ) ہو گا اور جس کے مرکز کے محدود  $جم$  بہ  $جم$  لہ (جم  $س$  + جم بہ جب لہ) اور جب بہ (جم  $س$  + جم بہ جب لہ)

۴۔ حجم یہ جب (لہ) ہونگے۔

مساوات حجم ص = جب یہ جب یہ + حجم یہ حجم (لہ - لہ) کی مدد سے  
یہ اور لہ کو سا قط کر۔

مثال ۷۔ شمالی نصف کرہ کا ایک نقشہ اس طرح بنایا گیا ہے کہ  
عرض بلد کے توازی ہم مرکز دائرے ہیں اور نصف النہار ان دائروں کے نصف  
قطر ہیں اور یہ کہ زمین پر کے مساوی رقبے نقشہ پر مساوی رقبوں سے تعبیر ہوتے  
ہیں۔ اس معنی کی مساوات معلوم کرو اور اسے مرتسم کرو جو نقشہ پر ایک  
مساوی المیلان کو تعبیر کرتا ہے۔

سوال کی شرطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = ص \text{ حجم لہ } ، ما = ص \text{ جب لہ}$$

جہاں ص یہ کا تفاعل ہے۔

چونکہ رقبے وہی رہتے ہیں اسلئے ان قیمتوں کو دفعہ ۲۵ میں مندرجہ شرط  
میں درج کرتے ہیں اور معلوم کرتے ہیں کہ

$$ص = \frac{\text{جف ص}}{\text{جف ص}} = - - \text{ حجم یہ}$$

جہاں ۷۷ ایک مستقل ہے جو کرہ پد کے اور قطر پر کے رقبوں کی نسبت کے ساتھ  
مربوط ہے۔

تکمل کرنے اور اختیاری مستقل کو اس شرط سے معلوم کرنے سے کہ  
ص = ۰ جبکہ یہ = ۹۰ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ص = ۲ = (۱ - جب یہ)$$

اور اس لیے

$$ص = ۲ = جب ( \frac{۲}{۲} - \frac{۲}{۲} )$$

اس مساوی المیلان خط کا ظل جو نصف النہاروں کو زاویہ ص (دفعہ ۲۱) پر قطع  
کرتا ہے حسب ذیل مساواتوں

$$لہ = مس صہ لوک مس ( \frac{۲}{۲} - \frac{۲}{۲} )$$



$$\text{مس لہ} = \frac{1}{11}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2} \text{ جب } \left( \frac{2}{11} - \frac{2}{11} \right)$$

کے درمیان بہ اور لہ کو مساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور یہ حاصل اسقاط قطبی معددوں میں

$$2 = (1 + 1) \text{ طہ مم صہ} = 2$$

مثال ۸۔ ثابت کرو کہ عرض بلد کے توازی پر سفر کرنے کی بجائے ایک بڑے دائرہ پر سفر کرنے سے وہ بڑے سے بڑا فاصلہ جس کی بچت کی جاسکتی ہے یہ ہے

$$1 \left[ 2 \text{ جب } \frac{1}{11} + \sqrt{11 - 11} \right]$$

جہاں ۱ زمین کا نصف قطر ہے۔

یہ واضح ہے کہ مفروضہ صورت میں آمد و رفت کے بندرگاہوں کے طول بلدوں کے درمیان فرق ۱۸۰ ہونا چاہئے تاکہ ان کو ملانے والا بڑا دائرہ قطب میں سے گذرے۔ اگر عرض بلد نہ ہو تو ان دو سفروں میں مسافت کا فرق ۱ (۱۱ جم نہ - ۱۱ + ۲ نہ) ہے اور یہ اعظم قیمت اختیار کرے گا جبکہ جب نہ =  $\frac{1}{11}$ ۔

مثال ۹۔ ثابت کرو کہ ایک نصف النہار سے ایک مقام تک جو دوسرے نصف النہار پر اسی عرض بلد میں ہے سفر کرنے میں مشرق اور مغرب کی سمت میں سفر کرنے کی بجائے ایک بڑے دائرہ پر سفر کرنے سے فاصلہ میں جو بچت ہوتی ہے وہ عرض بلد

$$\text{جم} \left( 1 - \sqrt{1 - 1} \right) \text{ جب لہ} \left( 1 - \sqrt{1 - 1} \right)$$

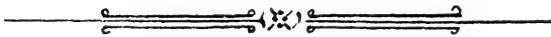
کے لیے اعظم ہے جہاں لہ ان دو نصف النہاروں کے طول بلد کا فرق ہے۔

مثال ۱۰۔ ایک جہاز کا چھوٹے سے چھوٹا راستہ معلوم کرو جسے ایک

نقطہ سے دوسرے نقطہ تک ایک خاص عرض بلد کو عبور کئے بغیر جانا ہے، یہ فرض کر لیا جائے کہ بڑے دائرہ کا راستہ اس عرض بلد کو قطع کرتا ہے۔

**مثال ۱۱**۔ کیپ کلیئر عرض بلد  $51^{\circ} 27'$  مش اور طول بلد  $9^{\circ} 29'$  م میں ہے۔ کیپ ریس عرض بلد  $46^{\circ} 40'$  مش اور طول بلد  $53^{\circ} 8'$  م میں ہے۔ اس امر کی تصدیق کرو کہ ان کے درمیان بڑے دائرہ کا راستہ سفر کے لیے اختیار کرنے میں اس بات کی ضرورت ہے کہ کیپ کلیئر سے اوپر  $1^{\circ}$  شمالی راستہ اختیار کیا جائے یہ نسبت اس سبب سے راستہ کے جو مرکز کی نقشہ سے معلوم ہوتا ہے۔ نیز یہ ثابت کرو کہ اول الذکر راستہ دوسرے راستہ کی یہ نسبت  $28$  میل چھوٹا ہے۔

**مثال ۱۲**۔ اگر کرہ کا نصف قطر  $1$  اور نخل کے مبداء سے تنظیمی نخل کے مستوی کا فاصلہ  $m$  ہو، پ اور پ کے متناظر نقطوں کا ایک زوج ہوں اور نخل کے مبداء میں سے گزرنے والے قطر سے پ کا فاصلہ  $r$  ہو تو ثابت کرو کہ پ کے قریب ایک چھوٹی قوس کا نخل، پ کے قریب ایک چھوٹی قوس ہوگا اور اس قوس کا طول  $s(m + r)$   $2m$   $1$  ہوگا۔



# پرتحاباب

## کرہ سماوی

(۶۹)

صفحہ

۱۰۶

۱۱۰

۱۱۱

۱۱۵

۱۱۹

صفحہ

۲۶ - کرہ سماوی

۲۷ - انقی سماوی

۲۸ - یومی حرکت

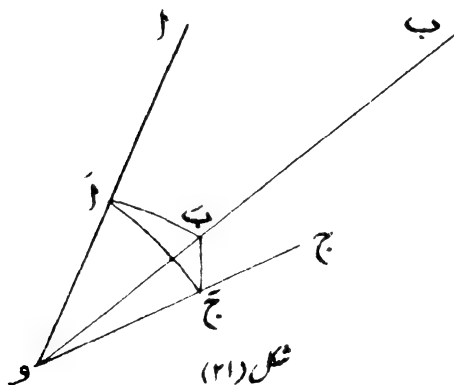
۲۹ - نصف النہال اور اول سمت

۳۰ - ارتفاع اور سمت

۲۶ - کرہ سماوی

فرض کرو کہ تین ستارے 'ا'، 'ب'، 'ج' (شکل ۲۱) ہیں اور مشاہدہ کا

محل وہ ہے۔



فرض کرو کہ مرکز و او کوئی نصف قطر و ا لیکر ایک کُرہ بنایا گیا ہے جو  
و ا، و ب، و ج کو علی الترتیب ا، ب، ج پر قطع کرتا ہے اور اس طرح (۷۰)  
کُرہی مثلث ا ب ج حاصل ہوتا ہے۔

زاویہ (اوب) وہ زاویہ ہے جو ستارے (ا اور ب) کے درمیان پر بناتے ہیں۔ اس کو آسانی کے ساتھ (اوب) کے ذریعہ ناپا جاسکتا ہے جو مثلث (اوبج) کا ایک ضلع ہے اسی طرح (بج) اور (ج) سے (بج) اور (ج) کے ناپ حاصل ہوتے ہیں۔

پس دو ستاروں کا خطا ہری فاصلہ اُس زاویہ سے ناپا جاتا ہے جو ان ستاروں کے محاذی مشاہد کی آنکھ پر پڑتا ہے۔ مثلاً ۱ اور ۲ کا خطا ہری فاصلہ زاویہ (اوج) کے ذریعہ یعنی (اوج) کے ذریعے ناپا جاتا ہے۔ دو ستاروں کے باہمی فاصلہ سے جو فی الحقیقت صرف ایک زاویہ ہے اس امر کا کوئی ایسا نہیں ہوتا کہ ان کے درمیان اصلی فاصلہ کیا ہے، یہ فاصلہ بلاشبہ ایک خطی مقدار ہے۔ اس اصلی فاصلہ کو معلوم کرنے کے لیے مشاہد کے مقام سے ان ستاروں کے خطی فاصلے معلوم ہونے چاہئیں۔ ثریا (Pleiades) کے ستارے دب اکبر (Ursa Major) کے ستاروں کی بہ نسبت باہم بہت نزدیک نظر آتے ہیں لیکن اس سے یہ نتیجہ برآمد ہونا ضروری نہیں ہے کہ ثریا (Pleiades) کے ستارے باہم ایک دوسرے کے قریب واقع ہیں۔

اجسام سماوی کے اضافی مخلوق کی فلکی پیمائشوں سے صرف ظاہری فاصلوں کی تعیین ہوتی ہے اور یہ فاصلے جیسا کہ ہم اوپر دیکھ چکے ہیں وہ تو فاصلے ہیں جو کہ گرد گھٹنے ہوئے کرہ پر واقع ہیں۔ اس لئے فلکی پیمائشوں کا علم ہندسہ کرہ کا علم ہندسہ ہے۔

نہ بکشت کرے اسے اجسام سماوی کے ظاہری فاصلے بغینہ اس طرح معلوم ہوتے ہیں جیسے وہ آسمان پر دکھائی دیتے ہیں۔ اس لیے اس کرہ کو کرہ سماوی کہا جاتا ہے۔ اس کے نصف قطر کا طول غیر اہم ہے اور مختلف سماوی کرہوں کا مقابلہ کرنے میں ہم ان کے نصف قطروں کو سماوی مان سکتے ہیں۔

کسی کرہٴ سماوی کا مرکز مشاہد کا مقام ہوتا ہے اور ظاہر ہے کہ ہر مقام کے لیے ایک مختلف کرہٴ سماوی ہوگا۔ اب ہم اس امر پر غور کریں گے کہ مختلف مقامات پر کے سماوی کرے ایک دوسرے سے کس حد تک مختلف ہوتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ مشاہد ستارہ سماک راجح (Arcturus) پر واقع ہے تو اس کا بنایا ہو کرہٴ سماوی وہی نہیں ہوگا جو زمین کے کسی مقام پر ایک دوسرا مشاہد بناتا ہے۔ ان دو صورتوں میں ستاروں کے کسی زوج کے باہمی ظاہری فاصلے بالعموم بالکل مختلف ہوں گے۔

مشاہدوں کے مقام یعنی سماوی کرؤں کے مرکز جتنے قریب واقع ہوں گے سماوی کرے زیادہ تر ایک دوسرے کے مشابہ ہوتے جائیں گے۔ ثابت ستاروں (انہیں بالعموم ایسا ہی کہا جاتا ہے) کا جہاں تک تعلق ہے اس حد تک یہ کہنا صحیح ہے کہ وہ سماوی کرے جو سطح زمین پر کے تمام نقطوں کے لیے بنائے جائیں عملاً مماثل ہوتے ہیں۔ اس کا باعث یہ ہے کہ زمین سے ان ثابت ستاروں کے فاصلے اس قدر بڑے ہیں کہ زمین کا قطر ان کے مقابلہ میں بالکل ناقابلِ قدر ہے۔ تمثیلاً ہم یہ بیان کر سکتے ہیں کہ اگر مشاہد کو زمین کے کسی مقام سے اس کے تحت قریبی مقام پر منتقل کیا جائے تو دو ستاروں کے باہمی فاصلہ کا تغیر کسی صورت میں بھی قوس کے ایک ثانیہ کے ۱۶۰۰۰ویں حصے سے تجاوز نہیں ہو سکتا جہاں تک کہ ہم فی الحال کو کبھی فاصلوں سے واقف ہیں۔ ہمارے ہمیشہی آلات اس قدر نازک نہیں ہیں کہ اس تغیر کو ناپ سکیں، اس کا ہزار گنا زاویہ لینے پر ہمارے آلات میں اس زاویہ کی کوئی قدر معلوم ہوتی ہے۔

سورج کے گرد زمین کی سالانہ حرکت کے باعث کسی ارضی مشاہد کا مقام تقریباً ایک دائری راستہ جس کا اوسط نصف قطر ۹۲۹۰۰۰۰ میل ہے حرکت کرتا ہے۔ اس لیے کوئی ارضی مشاہد چھ ہینوں کے وقفہ میں ایک ایسے فاصلہ پر منتقل ہو جاتا ہے جو اس مقدار کا تقریباً دو چندان ہے۔ لیکن ان حالات میں

بیشتر ستاروں کے ظاہری فاصلے بغیر کسی قابل قدر تغیر کے برقرار رہتے ہیں اور جہاں تک ہمارے علم کا تعلق ہے کسی صورت میں بھی اس انتقال کی باعث بڑے سے بڑا تغیر ۵۰۰ سے متجاوز نہیں ہوتا۔ (دیکھو پندرہواں باب)

اوپر جو کچھ بھی بیان کیا گیا ہے وہ صرف ثابت ستاروں کے متعلق ہے۔ ہم بارہویں باب میں یہ دیکھیں گے کہ کرّہ سماوی پر سورج اور سیاروں کے ظاہری مقامات کچھ حد تک اور چاند کا ظاہری مقام بڑی حد تک اُس محل سے متاثر ہوتے ہیں جو زمین کی سطح پر مشاہد اختیار کرتا ہے۔

ہم اُن ذاتی حرکتوں پر اس وقت غور نہیں کر رہے ہیں جو بعض اجسام سماوی کی ہوتی ہیں۔ یہ حرکتیں بلاشبہ ہر رصد گاہ کے کرّہ سماوی پر اُن اجسام کے محلوں کو متاثر کرتی ہیں۔

اگر ہم سماوی کرّوں پر صرف اُن اجسام سماوی کو مرسوم کریں جیسے کہ بیشتر ثابت ستارے ہیں جو اس قدر دور ہیں کہ وہ ظاہری فاصلے جو انہیں ایک دوسرے سے جدا کرتے ہیں نظام شمسی کے تمام حصوں سے قریب قریب وہی رہتے ہیں تو ہم سماوی کرّوں کے متعلق حسب ذیل بیان دے سکتے ہیں جس میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ان تمام کرّوں کے نصف قطر مساوی ہیں۔

نظام شمسی میں ہر مقام کے جواب میں ایک کرّہ سماوی ہوگا جس کا مرکز یہ مقام ہوگا۔

نظام شمسی میں ہر کرّہ سماوی ہر دوسرے کرّہ سماوی کے مانند ہوتا ہے نہ صرف نصف قطر کے لحاظ سے بلکہ اُن ستاروں کے لحاظ سے بھی جو اس پر نشان زدہ ہوں۔

کسی دئے ہوئے لمحے پر سماوی کرّے سب کے سب متشابہا واقع ہوتے ہیں یعنی ایک کرّہ کا کوئی نصف قطر جو کسی مخصوص ستارے تک

کھینچا گیا ہو دوسرے کرہ کے متناظر نصف قطر کے مساوی ہوتا ہے۔ اکثر اس میں سمجھوتہ ہے کہ کرہ سماوی پر اس طرح بحث کی جائے کہ گویا اس کا مرکز زمین کے مرکز پر منطبق ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ محدود فاصلے پر کے کسی نقطہ کو کرہ سماوی کا مرکز خیال کیا جاسکتا ہے اگر کرہ کا نصف قطر لا انتہا بڑا ہو۔ (۴۲)

فرض کرو کہ کرہ سماوی کا مرکز  $O$  ہے اور فرض کرو کہ  $P$  سے محدود فاصلے پر کوئی نقطہ  $A$  ہے اور کرہ کی سطح پر کوئی نقطہ  $M$  ہے تو

$$OA = OS - 2 \times OS \times \frac{PM}{OS} + \frac{PM^2}{OS}$$

$$= OS - (1 - 2 \frac{PM}{OS} + \frac{PM^2}{OS})$$

اب چونکہ  $PM$  محدود ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے  $OS$  لاتناہیں کی طرف مائل ہوتا ہے  $\frac{PM}{OS}$  صفر کے قریب آتا ہے ایسے انتہائے  $OS$  = ۱۔ لیکن چونکہ  $OS$  کرہ پر کے تمام نقطوں  $M$  کے لیے مستقل ہے اس لیے  $OA$  بھی مستقل ہونا چاہئے یعنی  $A$  کو کرہ کا مرکز متصور کیا جاسکتا ہے اور اس سے کوئی قابل قدر خطا واقع نہیں ہوتی۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ  $OA$  اور  $OS$  کی سمتیں انتہا میں منطبق ہونے کا میلان رکھتی ہیں۔

## ۲۔ اُفق سماوی۔

فرض کرو کہ زمین کی سطح پر مشاہد کا مقام  $P$  ہے اور فرض کرو کہ اس کا کرہ سماوی کھینچ لیا گیا ہے جس کا نصف قطر زمین کے نصف قطر کے مقابلہ میں بہت زیادہ بڑا ہے۔ اب اگر نقطہ  $P$  پر زمین کا محاس مستوی کھینچا جائے تو یہ مستوی اس کرہ سماوی کو ایک بڑے دائرہ میں قطع کرے گا اس بڑے دائرہ نوپ کا اُفق سماوی کہا جاتا ہے۔

کسی مقام پر افق کا مستوی، اس مائع کی سطح کا مستوی بھی ہے جو ایک کھلے برتن میں اس مقام پر سکون کی حالت میں ہو۔ یہ مستوی، ارضی کشش کی سمت پر عمود ہوتا ہے اور اس لیے زمین کی سطح کے کسی مقام پر خط شاقول کی سمت اس مستوی پر عمود ہوتی ہے جو پ کے افق کو تعبیر کرتا ہے۔ اگر اس خط شاقول کو ہر دو طرف خارج کیا جائے تو وہ کرہ سماوی کو دو نقطوں میں قطع کرے گا، یہ نقطے علم ہیئت کروئی میں بڑی اہمیت رکھتے ہیں۔ نقطہ س، جو اس طرح ٹھیک سر کے اوپر حاصل ہو پ کا راس کہلاتا ہے۔ دوسرا نقطہ ف قدم کہلاتا ہے جو کرہ سماوی پر اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ ہم خط شاقول کی سمت کو ٹھیک قدموں کی سمت میں خارج کریں یہ سمت کرہ سماوی کو اس نقطہ پر قطع کرے گی۔

## ۲۸۔ یومی حرکت۔

زمین کی روزانہ گردش، اپنے محور کے گرد، ۲۳ گھنٹے ۵۶ منٹ ۴ ثانیوں کے تقریبی وقفہ میں مکمل ہوتی ہے اور اسے بالعموم شمسی دن کہا جاتا ہے (دیکھو دفعہ ۳۳)۔ زمین کی اس روزانہ گردش کی باعث کرہ سماوی کی ظاہری گردش مخالف سمت میں یعنی مشرق سے مغرب کی طرف حاصل ہوتی ہے، یہ ظاہری گردش یومی حرکت کے طور پر مشہور ہے۔

زمین کی محوری گردش کو ثابت کرنے کا راست ترین طریقہ فوکو (Foucault) کے رقص کے تجربہ سے بہم پہنچتا ہے۔ اگر ہم زمین کو ایک کامل کرہ تسلیم کریں اور اس کا مرکز ہو تو فوکو کے رقص کے اصول حسب ذیل ہیں۔

فرض کرو کہ مقام پ پر مشاہد کا شمالی عرض بلد فہ ہے اور زمین کی زاویائی رفتار اپنے محور کے گرد سہ ہے۔ ہم فرض کر سکتے ہیں کہ سہ کو دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا گیا ہے ایک جز ٹھیکیلی، و پ کے گرد، سہ جب فہ ہے اور دوسرا، و ق کے گرد، سہ جم فہ ہے جہاں ق وہ نقطہ ہے



جس کا جنوبی عرض بلد ۹۰ - نہ ہے اور جو پ کے نصف النهار پر واقع ہے۔  
 جہاں تک کہ پ اور اس کے نزدیک کے مقامات کا تعلق ہے اس آخری  
 گردش کا اثر ان مقامات پر صرف انتقالی ہے اور اس لیے موجودہ مقصد کے  
 لحاظ سے یہ جزو تحلیلی نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ دوسرے جزو تحلیلی کا یہ اثر ہوگا  
 کہ اس کی باعث پ پر افق کا مستوی، و پ کے گرد زاویہ رفتار  
 سہ جب فہ کے ساتھ گردش کرے گا۔ اس لیے اگر پ پر کا کوئی انتصابی مستوی  
 و پ کے گرد گردش میں کوئی حصہ نہ لے یعنی وہ ساکن تصور کیا جائے تو  
 اس کے ساتھ کوئی اور انتصابی مستوی جو و پ کے گرد گردش میں حصہ لیتا  
 ہے ایسا زاویہ بنائے گا جو رفتار سہ جب فہ کے ساتھ بڑھتا رہے گا۔  
 فو کو رفاص وہ ذرائع ہم پہنچاتا ہے جو اس تجربہ کی تصدیق کرتے ہیں۔ علمی  
 تفصیلات میں گئے بغیر اس تجربہ کی لازمی خصوصیت حسب ذیل ہے:-

ایک ثابت نقطہ سے لمبے تار کے ذریعہ ایک بھاری وزن لٹکایا جاتا ہے۔  
 پھر اس وزن کو ایک طرف ہٹا کر احتیاط کے ساتھ چھوڑ دیا جاتا ہے تو یہ وزن  
 آہستہ آہستہ آگے پیچھے اہتر اند کرتا ہے۔ وہ مستوی جس میں یہ رفاص اہتر اند  
 کرتا ہے و پ کے گرد گردش میں حصہ نہیں لیتا۔ لیکن چونکہ مشاہد و پ  
 کے گرد ارضی گردش کو دیکھ نہیں سکتا، اہتر اند کا مستوی اطراف و اکناف کی  
 ارضی اشیاء کے حوالے سے گردش کرتا ہوا نظر آتا ہے۔ اس حرکت کی  
 سمت اور اس کی مقدار کی پیمائشوں سے زمین کی یومی حرکت متعین ہوتی  
 ہے۔ اگر زمین کے کسی ایک قطب پر اس تجربہ کو عمل میں لانا ممکن ہوتا تو اس کو  
 دکھانے کی یہ بہترین صورت ہوتی۔ خط استواء کے کسی مقام پر اہتر اند کے  
 مستوی کی کوئی ظاہری حرکت نہیں ہوگی۔

سماوی کرے پر کے سب نقطے، بجز دو نقطوں کے، یومی حرکت میں حصہ  
 لیتے ہیں۔ یہ دو نقطے بلاشبہ سماوی کرہ کے شمالی اور جنوبی قطب ہیں۔ ان  
 نقطوں کو ملانے والا خط زمین کے مرکز میں سے گذرتا ہے اور یہ خط وہ محور ہے  
 جس کے گرد زمین گردش کرتی ہے۔ یہ ہمیشہ ذہن نشین رہے کہ زمین کے

ابعاد سماوی کرہ کے مقابلہ میں ناقابل قدر ہیں اور اس لیے موجودہ مقاصد کے لیے ہم زمین کو صرف یہ سمجھیں گے کہ وہ 'سماوی کرہ' کے مرکز پر صرف ایک نقطہ ہے۔ زمین کو ایسا سمجھنے میں خاص فائدہ یا سہولت یہ ہے کہ ہم نہ صرف سماوی کرہ کے محور کو زمین کے مرکز میں سے گذرتا ہوا فرض کر سکتے ہیں بلکہ ہم ہمیشہ یہ بھی تصور کر سکتے ہیں کہ یہ محور کسی شاہد کے مقام میں سے بھی گذرتا ہے خواہ وہ زمین کی سطح پر کہیں واقع ہو۔ وہ قطب جو سماوی کرہ کے اُس حصہ میں واقع ہے جو شمالی عرض بلدوں میں سہنے والوں کو نظر آتا ہے شمالی قطب کے طور پر مشہور ہے۔ شمالی ہیئت داں طبقہ کی یہ خوش قسمتی ہے کہ شمالی قطب کا محل وقوع ایک جگہ از متصلہ ستارے سے جسے قطب تارہ کہتے ہیں بہت عمدگی سے نمایاں ہے۔ جنوبی آسمان کا متناظر نقطہ جو جنوبی قطب کے طور پر مشہور ہے اتنی عمدگی سے نمایاں نہیں ہے کیونکہ اس کے قریب کوئی چمکدار ستارہ موجود نہیں۔

زمین کے خط استواء کا مستوی یومی گردش سے متاثر نہیں ہوتا۔ یہ مستوی سماوی کرہ کو ایک بڑے دائرہ میں قطع کرتا ہے، یہ بڑا دائرہ سماوی خط استواء کے نام سے مشہور ہے اور اس کے قطب آسمان کے شمالی اور جنوبی قطب ہیں۔ خط استواء کے متوازی اور اس سے محدود فاصلہ پر کا کوئی مستوی سماوی کرہ کو سماوی خط استواء پر قطع کرتا ہے۔ ایسے سب مستویوں کے لیے خط استواء منعدم خط ہوتا ہے۔ زمین کا کوئی قطر (یا بالمشابہ کوئی مستقیم خط جو استواء طویل زمین کے ساتھ لگا ہوا ہو اور دونوں طرف غیر محدود خارج کر دیا گیا ہو) سماوی کرہ کو دو نقطوں میں قطع کرے گا اور یہ نقطے زمین کی یومی گردش کی باعث وہ دائرے مرتسم کریں گے جنہیں متوازی دائرے کہا جاتا ہے۔ یہ دائرے بالعموم سماوی کرے کے چھوٹے دائرے ہوتے ہیں اور جب ان کو پیدا کرنے والا خط زمین کے محور کے متوازی ہوتا ہے تو یہ دائرے علی الترتیب شمالی اور جنوبی قطبوں میں ضم ہو جاتے ہیں اور جب یہ خط زمین کے محور پر عمود ہوتا ہے تو وہ ایک دوسرے پر منطبق ہو کر خط استواء بن جاتے ہیں۔

افق سماوی کرہ سماوی کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے، ایک وہ نیم کرہ جو مری ہے اور دوسرا وہ نیم کرہ جو غیر مری ہے۔ جب کوئی ستارہ افق کے نیچے سے افق کے اوپر آ رہا ہوتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ ستارہ طلوع ہو رہا ہے اور جب وہ افق کے اوپر سے افق کے نیچے جا رہا ہوتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ ستارہ غروب ہو رہا ہے۔ اگر مشاہد زمین کے شمالی قطب پر ہو تو سماوی قطب شمالی اُس کے راس پر ہوگا اور اس کا افق سماوی خط استوا ہوگا۔ اس صورت میں زمین کی یومی حرکت کی باعث ستارے افق کے متوازی حرکت کرتے نظر آئیں گے اور طلوع اور غروب کے مظاہر پیش نہ آئیں گے، کرہ سماوی کے ایک نصف کا کوئی حصہ افق کے اوپر کبھی نہ آئے گا اور دوسرے نصف کا کوئی حصہ کبھی غروب نہ ہوگا۔ اگر مشاہد ارضی خط استوا پر ہو تو شمالی اور جنوبی قطب اُس کے افق پر ہوں گے اور وہ نیم کرے جن میں افق سماوی کرہ کو تقسیم کرتا ہے مسلسل بدلتے رہیں گے۔ ستارے افق سے عمود وار طلوع ہوں گے اور آسمان کا ہر ستارہ مشاہد کے افق کے اوپر نیم شمسی یوم تک نمودار رہے گا اور افق کے نیچے دوسرے نیم یوم تک غروب رہے گا۔ پس قطب پر کے مشاہد اور خط استوا پر کے مشاہد کے حالات میں یہ فرق ہوگا کہ اول الذکر مقام پر کرہ سماوی کا جتنا حصہ کسی لمحہ نظر آتا ہے وہ حصہ کبھی بھی زمین کی یومی گردش کی وجہ سے غیر مری نہیں ہو سکتا (۵۰) برخلاف اس کے خط استوا پر کے مشاہد کے لیے سماوی کرہ کا ہر جزو کبھی غیر مری ہو جاتا ہے اور کبھی مری۔

کسی ارضی مقام پر جو نہ قطب ہے اور نہ خط استوا، پر واقع ہے سماوی کرہ کا کچھ حصہ ہمیشہ افق کے اوپر رہے گا اور کچھ حصہ ہمیشہ افق کے نیچے رہے گا اور باقی حصہ کبھی افق سے اوپر اور کبھی افق کے نیچے۔ ہر ستارہ زمین کی یومی حرکت کی وجہ سے کرہ سماوی کے ایک چھوٹے دائرہ میں گردش کرتا نظر آئے گا، اس چھوٹے دائرہ کا مرکز سماوی کرے کا ایک قطب ہوگا۔ اگر یہ چھوٹا

۱۔ اس میں انعطاف کی رعایت نہیں رکھی گئی ہے۔

دائرہ بالکلیہ افق کے اوپر واقع ہو تو ستارہ کبھی غروب نہ ہوگا اور اس لیے ہمیشہ نمودار رہے گا (بادلوں یا سورج کی روشنی وغیرہ کی مداخلت فی الحال خارج از بحث ہے)۔ اگر یہ دائرہ بالکلیہ افق کے نیچے واقع ہو تو ستارہ کبھی طلوع نہ ہوگا اور اس لیے زیر بحث مقام پر کبھی بھی نمودار نہ ہوگا۔ لیکن اگر یہ دائرہ افق کو قطع کرے تو ستارہ کبھی افق کے اوپر اور کبھی افق کے نیچے ہوگا۔

## ۲۹۔ نصف النہار اور اول السمّت۔

وہ بڑا دائرہ جو سماوی قطبیں میں سے اور مشاہد کے راس اور قدم میں سے گذرتا ہے اس مقام کا نصف النہار کہلاتا ہے جہاں مشاہد مقیم ہے۔ سماوی نصف النہار وہ بڑا دائرہ بھی ہے جو مشاہد کے ارضی نصف النہار کے مستوی اور سماوی کرّہ کے تقاطع سے حاصل ہوتا ہے۔ پس سماوی نصف النہار وہ بڑا دائرہ ہے جو شمالی نقطہ نش (شکل ۲۲) سے افق کے علی القوائم نکلتا ہے اور پھر جنوبی نقطہ ج برآ کر افق سے عموداً ملتا ہے اور پھر افق کے نیچے اپنے راستے کو نش تک جاری رکھتا ہے۔

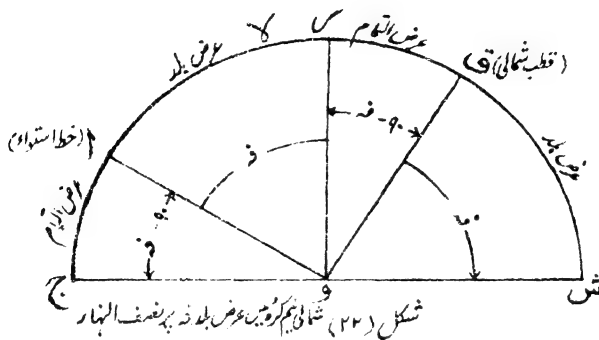
سماوی کرّہ کی یومی گردش میں ہر ستارہ نصف النہار کو لازماً دو مرتبہ عبور کرے گا اور ہر موقع پر ہم کہتے ہیں کہ ستارہ مرور کر رہا ہے۔ شمالی اور جنوبی قطبوں سے نصف النہار دو نیم دائروں میں تقسیم ہوتا ہے، ان میں سے ایک میں راس ہوتا ہے اور دوسرے میں قدم۔ جب ستارہ پہلے نیم دائرہ کو مرور کرتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ وہ بالائی تکبذ پر ہے اور جب وہ دوسرے نیم دائرہ کو مرور کرتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ وہ زیرین تکبذ پر ہے۔

(۷۹)

سماوی کرّہ کے بڑے دائروں میں نصف النہار سب سے زیادہ اہم ہے کیونکہ وہ کرّہ کے دو اہم ترین نقطوں یعنی قطب قی اور راس ک (شکل ۲۲) میں سے گذرتا ہے۔ تین اور نقطے ہیں جو خاص طور پر قابل یادداشت ہیں۔ یہ نقطے حسب ذیل ہیں، شمالی نقطہ نش اور جنوبی نقطہ ج جن میں نصف النہار افق کو قطع کرتا ہے، اور نقطہ ۱ جس میں نصف النہار سماوی خط استواء کو

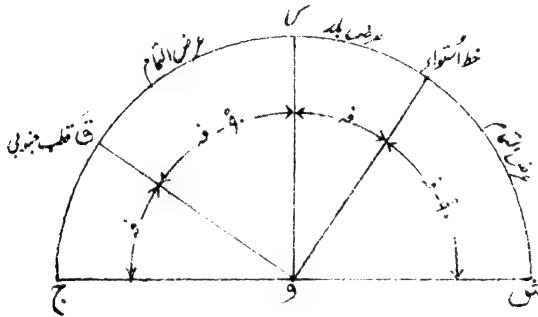
قطع کرتا ہے۔

عرض بلد ف وہ زاویہ ہے جو خط شاقول کی سمت اور خط استوا کے درمیان ہوتا ہے۔ (شکل ۱۲) مشاہد کا عرض بلد زاویہ  $\phi$  ہے یعنی



شمالی میل (دفعہ ۳۱) ۹۰۔ فہ سے کم نہ ہو چاہئے۔ کوئی ستارہ طلوع نہ ہوگا اگر اس کا جنوبی میل ۹۰۔ فہ سے زیادہ ہو۔

شکل ۲۲ کے جواب میں وہ نقشہ جو جنوبی نیم کرہ میں نصف النہار کو تعمیر کرتا ہے شکل ۲۳ میں دیکھایا ہے۔ یہ یاد رہے کہ جنوبی عرض بلد اکثر اس طرح ظاہر کئے جاتے ہیں کہ عرض بلد کی عددی قیمت کے باقیل منہی علامت لگا دی جاتی ہے۔ مثلاً شکل ذیل میں عرض بلد۔ فہ کا نصف النہار دکھایا گیا ہے۔



شکل (۲۳) جنوبی نیم کرہ میں جنوبی عرض بلد فہ پر نصف النہار وہ بڑا دائرہ جو اس میں سے گذرتا ہے اور نصف النہار پر علی القواہم ہے (اول السمیت) کہلاتا ہے۔ یہ بڑا دائرہ افق کے مشرقی اور مغربی نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ عرض بلد فہ کے ایک مقام کے حوالہ سے ایک ستارہ کے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے راسی فاصلے علی الترتیب ۱۸۰۔ {۰۔ (فہ + ضہ) اور فہ۔ ضہ ہیں جہاں ضہ ستارہ کا میل ہے۔

مثال ۲۔ اگر کسی ستارہ کا راسی فاصلہ ہمیشہ ایک ہی رہے تو ثابت کرو کہ مشاہد کا عرض بلد ۹۰۔ ہے یا ستارہ کا میل ۹۰۔ ہے۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ اگر کوئی ستارہ ہمیشہ افق کے اوپر رہے تو {۰۔ (فہ + ضہ) اور ۹۰۔ اگر وہ ہمیشہ افق کے نیچے رہے تو فہ۔ ضہ ۹۰۔

اور اگر وہ طلوع اور غروب ہوتا ہو تو  $\{ \sim (فہ + ضہ) \}$   $\sim ۹۰$  اور  $فہ \sim ضہ > ۹۰$ ۔  
**مثال ۴**۔ اگر مشاہد کا عرض بلد معلوم ہو تو بتاؤ کہ کسی ستارہ کا میل مردہ کے وقت اس کے راسی فاصلہ کا مشاہدہ کرنے سے کس طرح معلوم کیا جاسکتا ہے۔  
**مثال ۵**۔ گرینویچ کا عرض بلد  $۵۱^{\circ} ۲۸' ۳۸''$  ہے اثبات کرو کہ گرینویچ کے نصف النہار میں (شکل ۲۲)

$$\text{ج} (= \text{سرق}) = ۳۸^{\circ} ۳۱' ۲۱''$$

$$\text{اور } \{ \text{س} = \text{ق} = \text{ش} \} = ۵۱^{\circ} ۲۸' ۳۸''$$

**مثال ۶**۔ ثابت کرو کہ وہ کم سے کم عرض بلد  $۵۱^{\circ} ۲۹'$  ہے جس پر کے تمام ستارے جن کا شمالی میل  $۳۸^{\circ} ۳۱'$  سے تجاوز ہو جائے قطبی ستارے ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ اس عرض بلد پر وہ تمام ستارے جن کا جنوبی میل  $۳۸^{\circ} ۳۱'$  سے متجاوز ہو نہ وہ دائرہ نہیں ہوتے۔

**مثال ۷**۔  $۱۳^{\circ}$  نوبر کو سورج قطب شمالی سے  $۱۰۸^{\circ}$  پر ہے۔ ثابت کرو کہ کسی شمالی عرض بلد میں جو  $۲۲^{\circ}$  سے تجاوز ہو سورج افق کے اوپر طلوع نہیں ہوتا۔  
**مثال ۸**۔ اسٹاک ہوم (Stockholm) کی رصدگاہ عرض بلد  $۵۹^{\circ} ۲۰' ۳۳''$  شمال میں ہے اور راس امید (Cape of Good Hope) کی رصدگاہ عرض بلد  $۳۳^{\circ} ۵۶' ۲۵''$  ج میں واقع ہے۔ شعری (Sirius) کا میل  $۱۶^{\circ} ۳۵' ۲۲''$  ہے۔ اس کے ارتفاع معلوم کرو جب وہ علی الترتیب اسٹاک ہوم اور راس امید پر تکبہ میں ہو۔

(۷۸)

نصف النہار پر قطب شمالی سے افق کے جنوبی نقطہ تک فاصلہ  $۱۸۰^{\circ}$ ۔ فہ ہے جہاں  $فہ$  شمالی عرض بلد ہے (شکل ۲۲)۔ قطب سے کسی ستارہ کا فاصلہ جس کا میل  $۹۰^{\circ}$ ۔ فہ ہے (جبکہ  $ضہ$  کے ماقبل مناسب علامت لگائی جائے) اس لیے افق کے جنوبی نقطہ سے ستارہ کا فاصلہ

$$۱۸۰ - فہ - (۹۰ - ضہ) = ۹۰ - فہ + ضہ$$

ہے۔ پس اسٹاک ہوم کی صورت میں (چونکہ شعری کا میل منفی ہے) شعری کا ارتفاع

$$۹۰ - (۳۳^{\circ} ۲۰' ۵۹'') - (۱۶^{\circ} ۳۵' ۲۲'') = ۴۰^{\circ} ۲۴' ۵۵''$$

جنوبی عرض بلد پر (شکل ۲۳) قطب جنوبی سے شمالی نقطہ تک قوس ۱۸۰۔ فہ  
ہے اور قطب جنوبی سے شمالی میل فہ تک قوس ۹۰ + فہ ہے۔ اس لیے تکبذ  
کے وقت ارتفاع

$$۱۸۰ - فہ - (۹۰ + فہ) = ۹۰ - فہ - فہ$$

ہے۔ پس راس امید پر شعری کا ارتفاع بوقت تکبذ یہ ہے

$$۹۰ - (۳۲۵ ۵۶ ۳۳) + (۳۵ ۱۶ ۲۲) = ۲۲۲ ۰ ۳۵ ۱۶ ۲۲$$

مثال ۹۔ اگر ایک حائط قطبی ستارے کے راسی فاصلے بالائی اور  
زیرین تکبذوں پر علی الترتیب  $\frac{۱}{۲}$  رہ ہوں اور اگر یہ دونوں تکبذ راس کے شمال میں  
ہوں تو ثابت کرو کہ مشاہد شمالی عرض بلد ۹۰ -  $\frac{۱}{۲}$  (۱ +  $\frac{۱}{۲}$ ) میں ہے۔

### ۳۔ ارتفاع اور سمت

سماوی محدودوں کا صریح ترین نظام شاید وہ ہے جس میں افق کو بنیادی  
دائرہ کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔ ہم فرض کریں گے کہ ستارہ افق کے اوپر  
ہے اور ایک بڑا دائرہ راس سے ستارہ میں سے گزرتا ہوا کھینچا گیا ہے جو  
افق پر اگر ختم ہوتا ہے جسے یہ علی القوا تم قطع کرتا ہے۔ ایسے دائرہ کو انتصابی  
دائرہ کہتے ہیں۔ اس دائرہ کی وہ قوس جو افق اور ستارہ کے درمیان ہے  
ستارہ کا ارتفاع کہلاتی ہے اور ستارہ کا مقام متعین کرنے میں ایک محدود  
کام کرتی ہے۔ دوسرا محدود السمیت ہے جو افق پر مختلف طریقوں سے  
شمار کیا جاتا ہے۔ مناسب یہ ہے کہ اس معاملہ میں ایک یکساں طریق عمل  
اختیار کیا جائے۔ اس لیے ہم کسی جرم فلکی کا السمیت افق کے شمالی نقطہ  
سے افق کے گرد مشرق اور پھر جنوب کی طرف ستارہ کے انتصابی دائرہ کے  
پائین تک قوسی فاصلہ سے پیمائش کریں گے۔ پس السمیت کی ۰ سے ۳۶۰ تک

لہ اسمت محسوب کیا گیا یہ طریقہ قدما کا اختیار کردہ ہے۔ میں نے اسے ۱۶۳۷ء میں کمپس کارڈ  
(Compass Card) پر دیکھا ہے جسے پروفیسر سلوینس تھامسن نے ازراہ ہربانی مجھے دکھایا تھا۔



کوئی قیمت ہو سکتی ہے اور اس افق کا صدر شطب جسکی اس طرح درجہ بندی ہوئی ہو  
قدیم ہے ، اس میں ہے۔ جب کسی ستارے کے ارتفاع اور سمت معلوم  
ہوں تو اس کا محل متعین ہو جاتا ہے۔

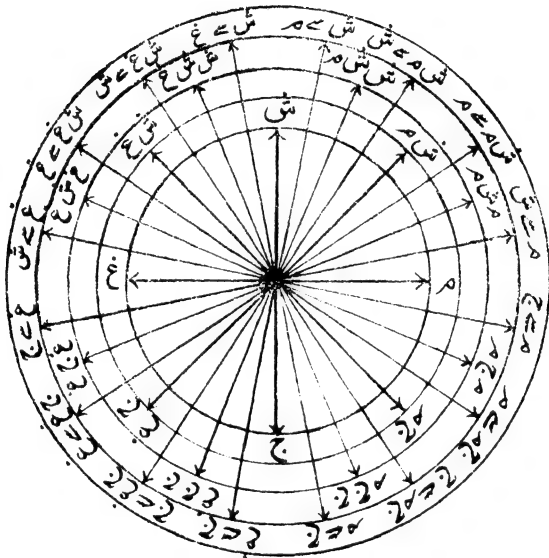
مثلاً اگر ایک ستارہ کا سمت ۳۱۰ اور اس کا ارتفاع ۱۵ ہو تو ستارہ  
محل اس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔ ہم افق کے شمالی نقطہ سے چلتے ہیں اور مشرق  
کی طرف سمت ۹۰ تک بڑھتے ہیں اور پھر وہاں سے جنوب کی طرف سمت  
۱۸۰ تک اور مغرب کی طرف سمت ۲۷۰ تک جا کر اسی سمت میں اور ۹۰ میلے  
کرتے ہیں تو سمت ۳۱۰ پر پہنچ جاتے ہیں۔ اس میں شک نہیں کہ وہ انتصابی  
دائرہ جس پر ہم اس طریقہ سے پہنچے ہیں اس طرح بھی کھینچا جاسکتا تھا کہ اس کا سمت  
۵۰ ہو یعنی وہ شمالی نقطہ سے مغربی جانب ۵۰ پر واقع ہے۔ لیکن اس  
محدود میں سعی قیمتوں سے بچنا زیادہ سہولت بخش ہے کیونکہ ۳۶۰  
جمع کرنے سے ہمیشہ ایسا کیا جاسکتا ہے۔ اس نقطہ کی جس پر انتصابی دائرہ  
افق سے ملتا ہے اس طور پر سمت کے ذریعہ تعین ہو جانے کے بعد انتصابی  
دائرہ پر معلوم ارتفاع پر ایک نقطہ لینا ہو گا جو اس صورت میں افق کے  
اوپر ۱۵ پر ہے، اس طرح ہمیں ستارہ کا مطلوبہ محل حاصل ہو جائیگا۔

ستارے کے ارتفاع کی بجائے ارتفاع کا متم استعمال کرنا اکثر سہولت  
باعث ہوتا ہے، یہ متم بالعموم راسی فاصلہ کے طور پر مشہور ہے۔ مثلاً زیر بحث  
سوال میں ۱۵ ارتفاع ہے اور اس لیے ۲۵ راسی فاصلہ ہے۔

سمت کی تقریبی پیمائشوں کے لیے مقناطیسی کمپاس (قطب نما)  
استعمال کیا جاتا ہے۔ کمپاس کی سوئی مقناطیسی شمال کو دکھائی ہے جو اصلی  
شمال سے کسی قدر منحرف ہوتا ہے، ان دو شمالوں کے درمیان جو زاویہ فصل  
ہے اس کو مقناطیسی انصراف کہتے ہیں۔ یہ انصراف مختلف اوقات  
اور نیز مختلف مقامات پر متغیر ہوتا ہے۔ جزائر برطانیہ کے لیے ۱۹۰۸ء  
میں سوئی اوسطاً ۱۹ اصلی شمال سے مغربی جانب ہٹی ہوئی رہتی تھی۔  
اس طرح مقناطیسی شمال کا سمت ۱۹۰۸ میں جزائر برطانیہ کے لیے

تقریباً ۳۴۲ تھا۔

(۸۰) بحر کی کپاس میں محیط کو ۱۰ ا کے مساوی وقفوں پر ۳۴۲ مساوی نقطوں میں تقسیم کیا جاتا ہے اور سمتیں تیروں کے ذریعہ ایک کارڈ پر دکھائی جاتی ہیں۔ اس کپاس کا نمونہ ذیل میں درج ہے۔



۱۰ نیا شٹل فیزیکل لیا بورٹری نے حسب ذیل معلومات از راہ مہربانی ارسال کئے ہیں:-  
۱۹۰۶ء میں اوسط مقناطیسی انصراف :-

۲۸۶۵۱۶ م

۲۸۶۳۱۴ م

۶۱۳۲۱ م

کیو  
اسٹونی ہرسٹ

ویالینیا

مقناطیسی انصراف گھٹ رہا ہے اور کیو پراس کے تغیر کی سالانہ مقدار کی اوسط

کارڈ پر چار خاص نقطے ش (مقابلہ شمال پر) م (مشرق) ج (جنوب) اور غ (مغرب) نشان زدہ ہوتے ہیں، ان میں سے ہر ایک ۹۰ کے وقفہ پر ہے۔ ان میں سے ہر وقفہ ان نقطوں سے جن پر ش م ج م ج غ ش کے نشان ہیں علی الترتیب تصنیف ہوتا ہے۔ اس طرح محیط آٹھ مساوی حصوں میں تقسیم ہو جاتا ہے۔ پھر ان میں سے ہر حصہ کی تصنیف کی گئی ہے ش اور ش م کی تصنیف ش ش م سے نشان زدہ ہے اور ش م اور م کی تصنیف م ش م سے نشان زدہ ہے اور علی بن القیاس اس طرح سولہ نقطوں کی تعیین عمل میں آتی ہے۔ باقی سولہ نقطوں کو پہلے آٹھ نقطوں ش م ج غ ش م ج غ ش م ج غ ش م ج غ سے اس طرح اخذ کیا جاتا ہے کہ صرف لفظ 'م' سے 'کا' اضافہ کر کے حرفوں ش م ج غ میں سے کوئی ایک ساتھ لکھ دیا جاتا ہے۔ مثلاً 'ش' کے معنی 'مغرب' سے شمال کی طرف ایک نقطہ ہے۔ اسی طرح 'غ' سے 'ج' کے معنی 'مغرب' سے جنوب کی طرف ایک نقطہ ہے اور 'ج م سے م' کے معنی 'ج م سے م کی طرف ایک نقطہ'۔

مثال ۱۔ نقطہ "ش م سے ش" کا سمت معلوم کرو جبکہ یہ

(۸۱)

بقیہ نوٹ :-

قیمتیں منظر سینین کے سلسلوں کے لیے حسب ذیل ہیں :-

۱۸۹۰ء تا ۱۸۹۹ء ..... ۸۹۱ ۱۸۹۰ء تا ۱۸۹۹ء ..... ۵۸۸

۱۸۹۰ء تا ۱۸۹۹ء ..... ۶۸۸ ۱۸۹۰ء تا ۱۸۹۹ء ..... ۶۸۸

ویا النیاس میں مشاہدات ۱۸۹۰ء میں شروع ہوئے۔ ۱۸۹۰ء سے ۱۸۹۹ء تک پانچ سالوں کے لیے انصراف میں سالانہ تغیرات کی اوسط قیمتیں حسب ذیل تھیں :-

اسٹونی ہیرٹ ..... ۳ و ۴ فالماوتہ ..... ۴۰ و ۴۱

کیہ ..... ۴۱ و ۴۲ ویا النیاس ..... ۴۳ و ۴۴

السمت مقناطیسی شمال سے پیمائش کیا گیا ہو۔  
 ش م مقناطیسی شمال سے چار نقطوں پر ہے اور ش م سے  
 ش کے معنی ش م سے شمال کی طرف (یعنی اُلٹے) ایک نقطہ۔ اس لیے  
 جواب ہے تین نقطے یعنی  $3 \times \frac{1}{4} = 11 \frac{3}{4}$ ۔  
 مثال ۲۔ اسی طرح ثابت کرو کہ مقناطیسی شمال سے غ ش غ  
 کا سمت ۲۹۲۵ پر ہے۔  
 مثال ۳۔ اگر ایک نقطہ کا سمت جو کیس سے معلوم کیا گیا ہو  
 ۳ ہو تو اصلی سمت معلوم کرو جبکہ مقناطیسی انصاف ۱۸۵ غ ہو۔  
 مثال ۴۔ مقناطیسی شمال سے نقطہ "ج م سے ج" کا اصلی سمت  
 معلوم کرو اگر مقناطیسی انصاف ۷۷ غ ہو۔

## چوتھے باب پر مختلف مثالیں

مثال ۱۔ اگر مشاہد سے دو ستاروں کے حقیقی فاصلے  $\mu$ ،  $\mu'$  ہوں  
 اور ان ستاروں کے درمیان کروہ سماوی پر ظاہری فاصلہ طہ ہو تو ثابت کرو کہ ان  
 ستاروں کے درمیان حقیقی فاصلے کا مربع حسب ذیل ہے

$$\mu^2 - 2\mu\mu' + \mu'^2$$

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اول السمّت، افق، اور خط استوا ایک  
 دوسرے کو دو ہی دو نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔

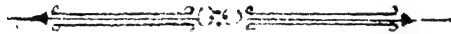
مثال ۳۔ اگر زمین کو ایک کروہ خالصہ کرنے سے اس کے استوائی اور  
 قطبی نصف قطر اور ب جوں تو ثابت کرو کہ زمین کے کسی نقطہ پر بڑے سے بڑا  
 ممکن زاویٰ فرق جو اس نقطہ پر زمین کے نصف قطر اور خط شاقول کے درمیان  
 ہو سکتا ہے یہ ہے

$$\frac{\sin \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\sin \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

**مثال ۴۔** اگر ایک ستارہ کا میل ضہ، عرض بلدہ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ اس ستارہ کے سمت کو، نصف النہار کی ایک جانب زاویہ جبّا (ج.م.ضہ ق.ط.فہ) اور دوسری جانب اس کے مساوی زاویہ کے درمیان اہتر از کرنا چاہئے۔

**مثال ۵۔** ثابت کرو کہ اس زاویہ کی جیب تمام جو ایک ستارہ کا طریق بوقت غروب افق کے ساتھ بناتا ہے ”عرض بلدہ کی جیب مضروب میل کا قاطع“ کے مساوی ہے۔

**مثال ۶۔** دو مقامات کا عرض بلدہ ایک ہی ہے اور ان میں سے گزرنے والے بڑے دائرہ سے قطب کا فاصلہ سورج کے میل کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ ان مقامات پر شب کا غول ان کے طول البلدوں کے فرق کے مساوی ہوگا۔



# پانچواں باب

(۸۲)

## صعود مستقیم اور میل - سماوی عرض بلد اور طول بلد

(۱۰۱)

صفحہ	دفعہ
۱۲۵	۳۱ - صعود مستقیم اور میل
۱۲۵	۳۲ - نقطہ راس کمال یا ۲
۱۳۰	۳۳ - ساعتی زاویہ اور کوکبی یوم
۱۳۶	۳۴ - ساعتی زاویہ اور میل سے راسی فاصلہ اور السمیت کی تعیین
۱۴۰	۳۵ - تفرقی مضابطوں کے اطلاقات
۱۴۸	۳۶ - کسی جرم فلکی کے تکبید کا وقت
۱۵۰	۳۷ - کسی جرم فلکی کا طلوع و غروب
۱۶۲	۳۸ - سماوی عرض بلد اور طول بلد

### ۳۱ - صعود مستقیم اور میل - اگرچہ ارتفاع اور السمیت ایک

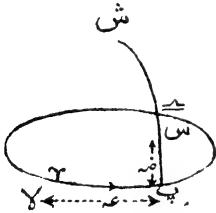
خافا سے کسی ستارے کے سادہ ترین محدود ہوتے ہیں لیکن بعض دوسرے محدود کے نظاموں سے زیادہ ہمولت پیدا ہوتی ہے کسی ستارے کے ارتفاع اور السمیت وقت کے ساتھ مسلسل بدلتے رہتے ہیں، جس کا باعث یومی حرکت ہے۔ نیز ایک ہی آن پر ایک ہی ستارے کے ارتفاع اور السمیت دو مختلف رصدگاہوں میں مختلف ہوتے ہیں۔ اس لیے یہ امر قابل ترجیح ہے کہ ایسے

محد استعمال کئے جائیں جو یومی حرکت کی وجہ سے نہ بدلیں اور وہی ہیں خواہ مشاہد کے محل کے عرض بلد اور طول بلد کچھ بھی ہوں۔ ہم ایسے محدود معلوم کر سکتے ہیں جن میں مطلوبہ خاصیتیں موجود ہوں اگر ہم ستارہ کا حوالہ کرہ سماوی پر کے ایک ثابت بڑے دائرہ سے دیں۔

سماوی خط استواء جیسا کہ قبل ازیں بتایا جا چکا ہے (صفحہ ۲۵) اپنے محل میں یومی گردش کے باوجود غیر تغیر رہتا ہے۔ نیز خط استواء یومی حرکت کے ساتھ ایک ایسا فطری تعلق رکھتا ہے کہ وہ خاص طور پر بنیادی دائرہ کا کام دینے کے لیے موزوں ہے چنانچہ علم ہیئت کروی میں سب سے زیادہ کارآمد محدود خط استواء کے حوالہ سے ہی پیمائش کئے جاتے ہیں۔ جب محدودوں کو خط استواء کے حوالہ سے لیا جاتا ہے تو کرہ سماوی کے کسی نقطہ کے محدود یومی حرکت کی وجہ سے نہیں بدلتے اور نہ اُس وقت بدلتے ہیں جبکہ مشاہد کا مقام تبدیل ہو سوائے اس صورت کے جبکہ جرم سماوی زمین سے اس قدر نزدیک ہو کہ اختلاف منظر قابل قدر ہو جائے۔ اس پر بارہویں باب میں بحث کی جائے گی اس لیے یہاں اس کی تشریح ضروری نہیں ہے۔

(۸۳)

کسی ستارہ کے محدود خط استواء کے لحاظ سے معلوم کرنے میں ہم حسب طریقہ اختیار کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ



شکل (۲۴)

خط استواء ۲ پ سے ہے  
اور ایک بڑا دائرہ ش پ  
(شکل ۲۴) سماوی قطب شمالی ش  
سے ستارہ س میں سے گذرتا ہو  
کھینچا گیا ہے اور یہ دائرہ خط استواء  
سے پ پر ملتا ہے۔ اس دائرہ پر  
مقطوعہ قوس پ س جو خط  
استواء اور ستارہ کے درمیان ہے

ستارہ کا میل کہلاتی ہے۔ قوس ۲ پ جو خط استواء پر کے ایک خاص

نقطہ ۲ سے اُس سمت میں ناپی گئی ہے کہ شمس اس کا شطب ہے ستارہ کا صعود متقیم کہلاتی ہے۔

صعود متقیم (یا ص) - جیسا کہ اکثر اختصاراً لکھا جاتا ہے (کو بالعموم ہم صرف عہ سے ظاہر کریں گے اور اس کی پیمائش ۰ سے ۶۰ تک ہو سکے گی۔ میل کو ہم بالعموم ضہ سے ظاہر کریں گے اور اس کے ماقبل منفی علامت لگا دینگے اگر ستارہ اس خط استواء کے جنوب میں ہو۔ اس شمس یعنی ۹۰ - ضہ شمال قطبی فاصلہ ہے اور بعض اوقات ضہ کی جگہ ستارے کے دوسرے محدود کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔

۳۲ - نقطہ راس الحمل یا ۲ - ہم کسی آئندہ باب میں ثابت

ستاروں کے لحاظ سے سورج کی ظاہری سالانہ حرکت پر غور کریں گے۔ لیکن ہم یہاں اس قدر کہہ سکتے ہیں کہ سورج ثابت ستاروں کے حوالہ سے سال میں ایک مرتبہ زمین کی بومی گردش کی سمت میں (یعنی مغرب سے جنوب اور پھر جنوب سے مشرق کی طرف) ایک مکمل دورہ مرتسم کرتا ہے۔ اس حرکت میں سورج کا مرکز تقریباً گرہ سماوی کے ایک بڑے دائرہ پر حرکت کرتا ہوا معلوم ہوتا ہے۔ یہ بڑا دائرہ طریق الشمس (Ecliptic) کے طور پر مشہور ہے۔ قدامت نے اسے (Ecliptic) اس وجہ سے کہا کہ جب خسوف واقع ہوتے ہیں تو چاند اس بڑے دائرہ کو عبور کرتا ہے۔

اُس سمت کا مشاہدہ کرنے سے جس میں سورج طریق الشمس کے گرد حرکت کرتا ہے ہم طریق الشمس اور خط استواء کے نقاط تقاطع یا دو عقدوں کے درمیان امتیاز کر سکتے ہیں۔ ان عقدوں کی تخصیص اس طرح عمل میں آئی ہے اُس عقدہ کو جس پر سورج خط استواء کو اس کے جنوب سے شمال کی طرف حرکت کرتا ہوا عبور کرتا ہے راس الحمل کہتے ہیں اور ۱ - سے علامت ۲

(۸۴)

سے ظاہر کرتے ہیں۔ سورج ۲ میں سے اُس آن گزرتا ہے جسے اعتدال صبیح (Vernal equinox) کہتے ہیں۔ یہ ہر سال تقریباً بتایخ ۲۱ مارچ واقع ہوتا ہے۔



مثلاً ۱۹۰۹ء میں اعتدال ربیع بتاریخ ۲۱ مارچ بوقت ۶ گ ۱۲ اگرینوج اوسط وقت واقع ہوا تھا۔

دو براعقدہ یا وہ نقطہ جس پر سورج خط استوا کو اس کے شمال سے جنوب کی طرف حرکت کرتا ہوا عبور کرتا ہے بروج میزان کا پہلا نقطہ (First pt. of Libra) کہلاتا ہے اور اسے علامت  $\text{♎}$  سے تعبیر کرتے ہیں۔ سورج  $\text{♎}$  میں سے اس آن گذرتا ہے جو اعتدال خریف (Autumnal equinox) کے طور پر مشہور ہے۔ (سنہ ۱۹۰۹ء ستمبر ۲۳ بوقت ۴ گ ۴۵ م گ۔ ۱-۹)۔

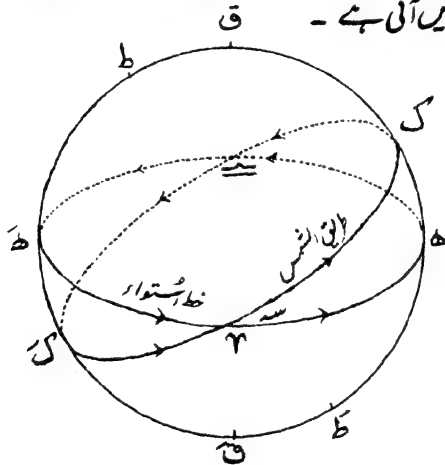
نیٹ دانوں نے متفقہ طور پر صعود مستقیم کی پائلس کے لیے راس المحل یعنی ۲ کو مبداء قرار دیا ہے۔ خط استوا پر مثبت سمت وہ ہے کہ سورج کا صعود مستقیم جو سورج کی حرکت کی وجہ سے ہر آن تغیر ہے ہمیشہ بڑھتا ہے۔ مثلاً چونکہ ستاروں کے درمیان سورج کا راستہ مغرب سے جنوب کی طرف اور جنوب سے مشرق کی طرف ہوتا ہے اس لیے خط استوا پر طریقی الشمس کا صعودی عقدہ ۲ ہے اور نزولی عقدہ  $\text{♎}$ ۔

چونکہ راس المحل علم ہیئت میں اس قدر غیر معمولی اہمیت رکھتا ہے اسے اس کا ذکر دینا مناسب ہے کہ اس جملہ میں لفظ ”حمل“ کی اہمیت محض تاریخی ہے اس میں شک نہیں کہ ایک زمانہ میں وہ عقدہ جس میں سے سورج بوقت اعتدال ربیع گذر کرتا تھا بروج حمل میں واقع تھا لیکن اب ایسا نہیں ہے۔ ہم استقبال (Precession) کے باب (آٹھویں) میں دیکھینگے کہ گو طریقی الشمس کا مستوی فضاء میں صرف قدرے ہٹتا ہے لیکن خط استوا کا مستوی اس طرح گردش کرتا ہے کہ طریقی الشمس کے ساتھ اس کا نقطہ تقاطع اس دائرہ (طریقی الشمس) پر نفی سمت میں تقریباً ۵ سالانہ کی شرح سے حرکت کرتا ہے حالانکہ طریقی الشمس کے ساتھ وہ تقریباً مستقل زاویہ بناتا ہے۔ پس صرف اس وجہ سے ہی آسمان کے بڑے حصہ میں کسی جرم فلکی کا ص - مد ہمیشہ بڑھتا رہتا ہے۔

۲ کا موجودہ محل تقریبی طور پر اس طرح دکھایا جاسکتا ہے۔ جب فرس (Pegasus) کا بڑا بروج جنوب کی طرف ہو تو اپنے ذہن میں خیال کرو کہ

اس کا بایاں انتصابی ضلع نیچے کی طرف اس کے اپنے طول کے مساوی خارج کیا گیا ہے۔ اس طرح جو نقطہ حاصل ہوا اس کی دائیں طرف ایک خط کھینچو جو مربع کے نیچے افقی ضلع کے متوازی اور اس کے طول کا ایک چوتھائی ہو۔ یہ خط ایسے نقطہ پر ختم ہوگا جو اس المحل کے موجودہ محل کے بہت ہی قریب واقع ہے۔

شکل (۲۵) میں ۲ سے خط استوا ہے، ۲ گ کے طریق الشمس ہے، ق اور ق' علی الترتیب استوا کے شطب اور ضد شطب ہیں اور ط ط' علی الترتیب طریق الشمس کے شطب اور ضد شطب ہیں۔ ۲ گ کے تیر سے سورج کی ظاہری حرکت کی سمت (بلحاظ ستاروں کے) دکھائی گئی ہے۔ ۲ سے پر کے تیر سے وہ سمت دکھائی گئی ہے جس میں صعود مستقیم کی پیمائش عمل میں آتی ہے۔



شکل (۲۵)

بڑا دائرہ ھ گ ھ گ دائرہ انقلاب (Solstitial Colure) کے طور پر مشہور ہے اور گ، گ' وہ نقطے ہیں جن پر صعود بالترتیب انقلاب گرما اور انقلاب سرما کے وقت پایا جاتا ہے۔ ق، ۲، ۲' میں

گذرنے والے بڑے دائرہ کو دائرہ اعتدالین (Equinoctial Colure) کہتے ہیں۔ خط استوا اور طریق الشمس کے درمیان میلان کو بانجم طریق الشمس کا میلان (Obliquity) کہتے ہیں۔ طریق الشمس کے میلان کی اوسط قیمت جو انیسویں بابہ فصلہ میں دی گئی ہے ۲۳° ۲۷' ۴۰" ہے۔ اس میں کبوت (Nutation) کی باعث قدرے عارضی کمی و بیشی ہوتی ہے (دیکھو آسمانوں باب) اور نیز اس میں خفیف مسلسل تنزل ۸۴" ۶۲" فی صد سال کی شرح سے عمل میں آتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر کرہ سادی پر ایک نقطہ کا صعود مستقیم ع اور میلان ضد ہو تو ثابت کرو کہ اس کرہ پر بعض خاص نقطوں سے لیے (شکل ۲۵) ع ضد کی قیمتیں حسب ذیل ہیں جہاں سے طریق الشمس کا میلان ہے :-

ع	ضد	ع	ضد
۹۰	۰	۹۰	۰
۲۷	۰	۶۳	۰
۹۰	۰	۹۰	۰
۲۷	۰	۶۳	۰

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ سورج کا صعود مستقیم ع اور میلان ضد ہمیشہ مساوات (۸۶)

مس ضد = مس ع

سے مربوط ہوتے ہیں۔

مثال ۳۔ بتاریخ ۹ مئی ۱۹۱۷ء سورج کا صعود مستقیم ۲۰° ۴۵' ہے اور طریق الشمس کا میلان ۲۳° ۲۷' ہے۔ ثابت کرو کہ سورج کا میلان ۱۷° ۱۸' ہے۔

۳۳۔ ساعتی زاویہ اور کوکبی یوم۔ بعض اوقات اس میں

سہولت ہوتی ہے کہ مبدا کو جہاں سے خط استواء پر محدودوں کی چمائش عمل میں آئی ہے اس نقطہ پر لیا جائے جو افق کے اوپر خط استواء اور مشاہد کے نصف النہار کا نقطہ تقاطع ہے۔ یونی حرکت کی باعث جو نصف النہار کو ایک کو کبھی یوم کے عرصہ میں کرہ سماوی کے گرد پھراتی ہے یہ مبدا کرہ سماوی پر ثابت نقطہ نہیں ہے بلکہ وہ خط استواء پر یکساں طور پر حرکت کرتا ہے اور اپنی گردش ایک کو کبھی یوم میں مکمل کرتا ہے۔ اس لیے اگر کوئی جرم فلکی کرہ سماوی پر ثابت ہو تو اس کا ایک محدود جس کی چمائش اس متحرک مبدا سے عمل میں آئی ہو وقت کے ساتھ ضرور بدلنا چاہئے۔ اگر ایک بڑا دائرہ جسے ساعتی دائرہ کہتے ہیں قطب سے کسی ستارہ تک کھینچا جائے تو وہ زاویہ جو یہ ساعتی دائرہ نصف النہار کے ساتھ بنائے ساعتی زاویہ کہلاتا ہے۔ اس طرح کسی ستارہ کا ساعتی زاویہ اور اس کا میل (اس کا قطبی فاصلہ) محدودوں کا ایک نظام بنائے ہیں جو اکثر سہولت کا باعث ہوتے ہیں۔

کسی جرم فلکی کا میل یونی حرکت کی وجہ سے تبدیل نہیں ہوتا۔ لیکن اسکا ساعتی زاویہ برابر بدلتا رہتا ہے۔ چونکہ ستارہ بالائی ٹکٹہ سے مغربی جانب حرکت کرتا نظر آتا ہے اس لیے ہم ساعتی زاویہ کی چمائش نصف النہار سے مغربی جانب کریں گے۔ پس ساعتی زاویہ صفر ہو گا جب جرم بالائی ٹکٹہ پر ہو اور بتدریج ۱۸۰ تک بڑھے گا جیسے جیسے جرم زیرین ٹکٹہ تک سفر کرے گا اس کے بعد وہ مسلسل بڑھتا رہے گا تا آنکہ وہ پھر بالائی ٹکٹہ پر آکر ۳۶۰ ہو جائے۔ اس لیے نصف النہار کی مغربی جانب ساعتی زاویہ ۰ اور ۱۸۰ کے درمیان ہوتا ہے۔ نصف النہار کی مشرقی جانب ساعتی زاویہ ۱۸۰ اور ۳۶۰ کے درمیان ہوتا ہے۔ پس اس قرار داد کی بموجب ساعتی زاویہ ہمیشہ بڑھتے ہیں اور چونکہ کسی زاویہ میں ۳۶۰ جمع یا تفریق کئے جاسکتے ہیں جبکہ یہ زاویہ منٹشی تقاطع میں استعمال ہوا اس لیے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ سب ساعتی زاویے ۱۸۰ اور ۳۶۰ کے درمیان واقع ہوتے ہیں اور یہ کہ مغربی جانب ساعتی زاویے مثبت ہوتے ہیں اور مشرقی جانب منفی۔

ساعتی زاویہ (بر خلاف میل کے) مشاہد کے مقام کے ساتھ بدلتا ہے۔ مثلاً جب کوئی ستارہ بمقام گرینوچ نصف النہار کو عبور کر رہا ہو تو اس کا ساعتی زاویہ وہاں صفر ہے۔ لیکن اسی آن پر یہ ستارہ مشرقی مقامات کے نصف النہاروں کو عبور کر چکا ہوگا اور اس لیے ایسے مقامات پر اس سے مغربی ساعتی زاویوں کا اظہار ہوگا۔ اُس مقام پر جہاں طول بلد گرینوچ کے مشرق میں ۲ گھنٹے ہے ستارہ کا ساعتی زاویہ دو گھنٹے مغرب نظر آئے گا حالانکہ اسی آن پر گرینوچ کے مشاہد کو یہ ستارہ نصف النہار پر نظر آئے گا۔ زیادہ عام طور پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ دو مقامات پر جن کے مشرقی طول بلد علی الترتیب ل اور ل ہیں ایک ہی جرم کے ساعتی زاویے (مغربی) ایک ہی آن پر طے اور طے + ل - ل ہوں گے۔

(۸۷)

کسی منتخب نصف النہار پر اس محل کے دو متصل مدوروں کے درمیان وقت کا جو وقفہ ہوتا ہے اس کو ”کو کبی یوم“ کہتے ہیں۔ اگر ہم یہ یاد رکھیں کہ ستارے گرہ سماوی پر عملاً ثابت ہیں اور اگر ہم بعض چھوٹی بے قاعدگیوں کو فی الحال نظر انداز کریں تو ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ نصف النہار پر ایک ہی ستارہ کے دو متصل مدوروں کے درمیان وقت کا وقفہ کو کبی یوم ہے۔ نیز کو کبی یوم کی تقریباً تمام عملی مقاصد کے لیے کافی صحت کے ساتھ یوں بھی کی جاسکتی ہے کہ یہ وہ وقفہ ہے جس میں زمین اپنے نور کے گرد ایک مکمل گردش کر لیتی ہے (دیکھو دفعہ ۲۸)۔ اگر اسے اوسط شمسی وقت میں بیان کیا جائے تو کو کبی یوم ۲۳ ۵۶ ۹۰۶ ۰۰۰ کا ہوتا ہے۔

شمسی یوم کی طرح کو کبی یوم بھی ۲۴ مساوی وقفوں میں تقسیم کیا جاتا ہے اور ان وقفوں کو کو کبی گھنٹے کہتے ہیں۔ کو کبی گھنٹہ ۶۰ منٹوں (دقیقوں) میں تقسیم ہوتا ہے اور ہر منٹ ۶۰ ثانیوں میں۔

کسی ستارہ کے مدور کے بعد کو کبی وقت کے ایک گھنٹہ میں اس کا ساعتی زاویہ دیکھنے میں پیمائش کردہ ۱۵ ہوگا یہ محیط کا ۲۴ وال حصہ ہے۔ ساعتی زاویہ کو درجوں میں بیان کرنے کی بجائے کو کبی وقت میں بیان کرنے کا

دستور ہے۔ مثلاً اگر ستارہ کو نصف النہار سے گزرتے تین گھنٹے (کو کبی) ہو گئے ہوں اور اگر ستارہ اور خط استواء کے درمیان اس شاعری دائرہ کا متقطعہ ۳۵° ہو جو قطب سے خط استواء تک ستارہ میں سے گزرتا ہو اٹھینچا گیا ہے تو ہم اس مخصوص مقام اور اس مخصوص آن پر ستارہ کے محل کو یہ کہہ کر متعین کر سکتے ہیں کہ اس کا مغربی ساعتی زاویہ تین گھنٹے اور اس کا شمالی میل ۳۵° ہے۔

ساعتی زاویہ کو جو اس محل سے مغربی جانب ہو ۱۵° فی گھنٹہ کی شرح سے وقت میں تبدیل کریں تو کو کبی وقت حاصل ہوگا۔ جب اس محل نصف النہار پر بالائی اکتید میں ہو تو کو کبی وقت، بگ ۱۰ بٹ ہوتا ہے۔ نصف النہار سے گزر جانے کے بعد اس محل کا ساعتی زاویہ ۱۵° ہو جائے تو کو کبی وقت ایک گھنٹہ ہوتا ہے اور اگر اسے نصف النہار سے گزرے اتنی دیر ہوئی ہو کہ اس کا ساعتی زاویہ ۲۸۵° ہو تو کو کبی وقت ۱۹ گھنٹے ہوگا۔

(۸۸)

فرض کرو کہ ایک ستارہ اس کا صعود مستقیم وقت میں بیان کردہ عہ ہے

اور فرض کرو کہ ساعتی زاویہ مغربی س

ہے اور کو کبی وقت ط ہے۔

فرض کرو کہ ش س

نصف النہار ہے (شکل ۲۶) اور

ش ۲ دائرہ اعتدالین کو کو کبی

وقت ط حسب تعریف بالازاویہ

ش ۲ سے ناپا جاتا ہے۔

س کا صعود مستقیم

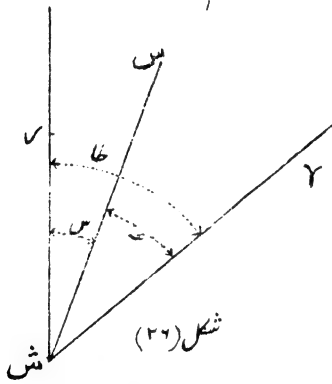
ش ۲ سے اور علامت

کے متعلق کوئی ابہام نہیں ہو سکتا کیونکہ ش خط استواء کا شطب ہے اور

صعود مستقیم دائرہ اعتدالین سے مثبت سمت میں ناپا جاتا ہے۔ نیز

س ش س، س کا ساعتی زاویہ ہے۔ اس لیے

س = ط - ع



اس طرح ہمیں ایک اہم رشتہ حاصل ہوتا ہے جو کسی جرم کے ساعتی زاویہ اور صعود مستقیم کو کوکبی وقت کے ساتھ مربوط کرتا ہے۔

**مثال ۱۔** ثابت کرو کہ اگر کسی ستارہ کا صعود مستقیم معلوم ہو تو اس کا ساعتی زاویہ ناپ کر کوکبی وقت معلوم کیا جاسکتا ہے۔

**مثال ۲۔** اگر ایک ستارہ کا ساعتی زاویہ مشرقی  $98^\circ 11' 15''$  ہو اور اس کا صعود مستقیم  $23^\circ 29'$  ہو تو ثابت کرو کہ کوکبی وقت  $38^\circ 26' 13''$  ہے۔

ساعتی زاویہ مغربی ہے  $360 - (98^\circ 11' 15'') = 261^\circ 48' 45''$  اسے  $15^\circ$  فی گھنٹہ کی شرح سے وقت میں تبدیل کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے  $17^\circ 24' 15''$  اس لیے

$$ط = عد + س = 38^\circ 26' 13'' = 38^\circ 26' 13''$$

کیونکہ  $38^\circ 26'$  کو ہمیشہ خارج کیا جاسکتا ہے۔

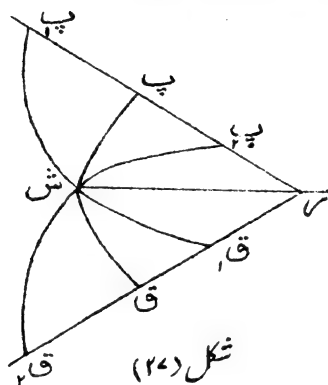
**مثال ۳۔** اگر طہ ساعتی زاویہ ہو جس کی پیمائش درجوں میں ہوئی ہے تو ثابت کرو کہ اس زاویہ کا دائری ناپ  $22^\circ 14'$  ہے۔

**مثال ۴۔** اگر کسی ساعتی زاویہ میں گھنٹوں کی تعدادات ہو تو ثابت کرو کہ اس زاویہ کا دائری ناپ  $22^\circ 14'$  ہے۔

**مثال ۵۔** شمالی عرض بلد نہ کے کسی مقام پر سمت  $\angle$  کے ایک انتصابی دائرہ پر کسی ستارہ کے ایک مرور اور دوسرے انتصابی دائرہ پر جو نصف النهار کے ساتھ وہی زاویہ بنائے ایک مرور کے درمیان جو وقفہ ہوتا ہے وہ سب ستاروں کے لیے وہی ہوتا ہے اور ایک کوکبی یوم کے تم (جب دسمس  $\angle$ ) کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ش (شکل ۲) قطب سماوی، ر اس کا ہے، سہا پ (اور مرق مفروضہ انتصابی دائرے ہیں، شپ اور شق (ق) بڑے دائرے ہیں جو انتصابی دائروں پر عمود ہیں، پ اور پم وہ نقطے ہیں جن پر کوئی دیا ہوا ستارہ پ کو عبور کرتا ہے اور ق، ق وہ نقطے ہیں جن پر

یہ ستارہ ساقی کو مجبور کرتا ہے۔ اب تشاکل سے  
زاویہ پ ش پ = زاویہ پ ش پ = زاویہ ق ش ق = زاویہ ق ش ق  
اور اس لیے  
زاویہ پ ش ق = زاویہ پ ش ق = زاویہ پ ش ق  
اور اس لیے یہ منتخبہ ستارہ پر منحصر نہیں ہے۔







لکھ لیے جا سکتے ہیں۔ اس قرار داد کی بموجب کہ سمت کی پیمائش نقطہ شمالی سے عمل میں آئی چاہئے (دفعہ ۱) سمت و ایسی سمت میں لیا جاتا ہے کہ قدم افق کا شطب بموجب اسے (افق) ایک بڑا دائرہ سمجھا جائے جس کی درجہ بندی سمت کی پیمائش کے لیے عمل میں آئی ہو۔ بلاشبہ قطب شمالی خط استوا کا شطب ہے جبکہ اس کی درجہ بندی صعود مستقیم کی پیمائش کے لیے کی گئی ہو۔ شطب کی تعریف سے (دفعہ ۶) یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر دو درجہ دار بڑے دائروں  $L$  اور  $L'$  کے شطب  $MS$  اور  $M'S'$  ہوں تو  $MS$  (۱۸۰) کا شطب  $L$  پر  $L'$  کا صعودی عقدہ ہے اور  $M'S'$  (۱۸۰) کا شطب  $L'$  پر  $L$  کا صعودی عقدہ ہے۔ اس طرح خط استوا پر افق کا صعودی عقدہ وہ نقطہ ہوگا جو مغرب کی جانب ہے اور اس لیے قہ یعنی اس صعودی عقدہ کا سمت ۲۷۰ ہے جبکہ اس کی پیمائش نقطہ شمالی کو مبدأ امان کر عمل میں آئے۔ کو کبھی وقت طاوہ ساعتی زاویہ ہے جس قدر ۲ نصف النہار کے مغرب میں ہے۔ اس لیے اس سمت کو ذہن میں رکھنے سے جس میں صعود مستقیم کی پیمائش کی جاتی ہے خط استوا پر افق کے صعودی عقدہ کا صعود مستقیم قہ ۲۷۰ + طاکے مساوی حاصل ہونا چاہئے۔ افق اور خط استوار کے درمیان زاویہ ۹۰ + قہ ہے کیونکہ یہ وہ زاویہ ہے جو ان کے شطبوں کے درمیان ہے۔ آخر الامر چونکہ اس افق کا ضد شطب ہے اس لیے ضد منفی ہے اور ۹۰ - کے مساوی ہے جہاں ی راسی فاصلہ ہے۔ (دفعہ ۹۱) کے ضابطوں (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) میں ضروری اندراجات عمل میں لانے سے مطلوبہ مساواتیں

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جب } L \text{ جب } Y = \text{جم ضد جب (طا۔ ع)} \\ \text{جم } L \text{ جب } Y = \text{جم ضد جب ضد۔ جب ضد جم ضد جب (طا۔ ع)} \dots (۱) \\ \text{جم } Y = \text{جب ضد جب ضد + جم ضد جم ضد جب (طا۔ ع)} \end{array} \right.$$

اور ان کے مائل حسب ذیل مساواتیں

- جب (طا - عد) جم فہ = جب ا جب ی  
 جم (طا - عد) جم فہ = جم فہ جم ی - جب فہ جم ا جب ی ... (۲)  
 جب فہ = جب فہ جم ی + جم فہ جم ا جب ی  
 حاصل ہوتی ہیں -

مساواتوں (آ) سے ہم راسی فاصلہ اور سمت محسوب کر سکتے ہیں جبکہ  
 میل اور ساعتی زاویہ (طا - عد) معلوم ہوں، اور اس کے بالعکس مساواتوں  
 (۲) سے ہم میل اور ساعتی زاویہ معلوم کر سکتے ہیں جبکہ راسی فاصلہ اور سمت  
 معلوم ہوں -

اگر ساعتی زاویہ اور میل معلوم ہوں تو راسی فاصلہ کی تعیین کے لیے  
 حسب ذیل طریقہ بہت سہولت بخش ہے - وہ زاویہ جو ستارہ پر اس قوس  
 کے محاذی پتا ہے جو راس اور قطب کو ملاتی ہے اختلاف منظری زاویہ  
 (Parallactic angle) کہلاتا ہے - ہم اسے عا سے تعبیر کریں گے - اب اسکی  
 تعیین کے لیے دفعہ (۱) کی بنیادی مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے حسب ذیل  
 مساواتیں ملتی ہیں جن میں ساعتی زاویہ (طا - عد) کی بجائے س لکھا گیا ہے:

جم ی = جب فہ جب فہ + جم فہ جم س  
 جب عا جب ی = جم فہ جب س  
 جم عا جب ی = جب فہ جم فہ - جم فہ جب فہ جم س ... (۴)

اگر س اور فہ معلوم ہوں تو اختلاف منظری زاویہ عا اور راسی فاصلہ  
 ی دونوں، ان مساواتوں سے معلوم کئے جاسکتے ہیں - چونکہ جب ی اور  
 جم فہ دونوں ہمیشہ مثبت ہوتے ہیں اس لیے دوسری مساوات سے یہ نتیجہ  
 نکلتا ہے کہ عا اور س کی ایک ہی علامت ہے - یہ دونوں نصف النہار کے  
 مغرب میں مثبت ہیں اور نصف النہار کے مشرق میں منفی -

اکثر اس امر میں سہولت ہوتی ہے کہ ان اعمال حساب کو  
 ذیلی مقداروں کی مدد سے مکمل کیا جائے - ہم دونی مقداریں م اور ن  
 شرطوں

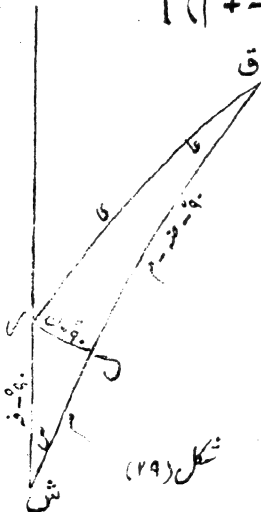
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جم ن} = \text{جم فہ جب س} \\ \text{جب ن جم م} = \text{جب فہ} \\ \text{جب ن جب م} = \text{جم فہ جب س} \end{array} \right. \dots \dots (۴)$$

کے ذریعہ داخل کرتے ہیں۔ اگر م اور ن کی قیمتوں کا ایک زوج ن، م،  
ان مساواتوں کو پورا کرے تو یہ مساواتیں ۳۶۰ - ن اور ۹۸۰ + م سے  
بھی پوری ہوں گی۔ اس لیے کوئی ہرج نہ ہوگا اگر ہم آئندہ عمل میں ن، م،  
استعمال کریں یا ۳۶۰ - ن، ۹۸۰ + م، استعمال کریں۔ ان دو زوجوں میں سے (۹۲)  
کسی ایک کو ن، م کے طور پر لیتو (۳) میں اندراج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جم ی} = \text{جب ن جب (ضہ + م)} \\ \text{جب عا جب ی} = \text{جم ن} \\ \text{جم عا جب ی} = \text{جب ن جم (ضہ + م)} \end{array} \right. \dots \dots (۵)$$

ان مساواتوں کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مس عا} = \text{م ن قضا (ضہ + م)} \\ \text{مس ی} = \text{قضا عام (ضہ + م)} \end{array} \right. \dots \dots (۶)$$



شکل (۲۹)

ان میں سے پہلی مساوات سے عام معلوم ہوتا ہے اور پھر دوسری مساوات سے ی ملتا ہے۔ اس میں شک نہیں کہ ی کو مساواتوں (۵) میں سے پہلی مساوات سے بھی معلوم کیا جاسکتا ہے لیکن ہمیشہ یہ امر قابل ترجیح ہے کہ کسی زاوے کو اسٹی جیب التمام سے معلوم کرنے کی بجائے اس کے

ماس سے معلوم کیا جائے (دفعہ ۳)۔

ضوابط (۴) اور (۵) ہندسی طور پر فوراً حاصل کئے جاسکتے ہیں۔  
کیونکہ اگر  $ر$  کی 'شقی پر عمود ہو' (شکل ۲۹) تو  $ش$  کی  $م$  اور  
 $ر$  کی  $۹۰ = ۹۰ - ن$

مساداتوں (۴) سے یہ واضح ہے کہ  $ن$  اور  $م$  چونکہ صرف عرض بلد  
اور سامتی زاوے پر منحصر ہوتے ہیں اس لیے وہ 'سب میلوں کے ستاروں  
کے لیے وہی ہوتے ہیں۔ اس لیے کسی معلومہ رصد گاہ کے لیے یا زیادہ صحیح طور پر  
کسی دئے ہوئے عرض بلد کے لیے ایک مرتبہ ایک جدول کا تیار کر لینا بہت  
بخش ہوتا ہے جس سے اس عرض بلد پر کے کسی مقام کے لیے ہر مخصوص  
سامتی زاویہ کے جواب میں  $م$  اور  $ن$  کی قیمتیں فوراً حاصل کی جاسکتی ہیں  
مثال ۱۔ اس امر کی تصدیق کرو کہ مساداتوں

مس =  $۹۰ - م$  ن قط (ضد +  $م$ ) اور مس  $ی =$  قط عام (ضد +  $م$ )  
میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی جبکہ  $م$  اور  $ن$  کو علی الترتیب  $۱۸۰ + م$  اور  $۳۶۰ - ن$   
میں تبدیل کیا جاتا ہے۔

مثال ۲۔ ستارہ ۶۱ درجا ۵۱ (61 Cygni) کا راستی فاصلہ اور  
اختلاف منطری زاویہ معلوم کرو جبکہ وہ نصف النہار سے  $۳۶$  درجہ پر ہو۔ اس کا  
میل  $+ ۳۸ ۹$  ہے اور مشاہد کا عرض بلد  $۵۳ ۳۳$  ہے۔

مساداتوں (۴) سے ہم معلوم کرتے ہیں  $م = ۳۳ ۲۷$  اور  $ن = ۹۱ ۶۶ ۷۶$  (ن)  
اس لیے ضد +  $م = ۵۲ ۶۵$  اور (۶) سے  $ع = ۸۸ ۴۸$ ،  
 $ی = ۱۰ ۲۴$

### ۳۵۔ تفرقی ضابطوں کے اطلاقات - (۹۳)

فرض کرو کہ قطب 'ش' ستارہ 'ق' اور اس میں کو ملانے سے ایک  
مثلث 'ش' 'ق' 'ر' حاصل کیا گیا ہے (شکل ۲۹)۔ اس مثلث پر دفعہ (۴)  
کے بنیادی ضابطے استعمال کرنے سے جو چہ تفرقی ضابطے حاصل ہوتے ہیں

ان کا ایک ساتھ لکھ لینا سہولت بخش ہے۔ قوس ش ق قطبی فاصلہ ہے جو ۹۰۔ نہ کے مساوی ہے، عرض التمام ش س ہے یعنی ۹۰۔ نہ ش س کا راسی فاصلہ ی ہے اور عرض بلد ۹۰۔ ی ہے۔ اختلاف منطوی زاویہ عا ق پر ہے۔ یہ زاویہ مثبت ہے کیونکہ وہ نصف النہار کے مغرب میں ہے۔ ساعتی زاویہ س ط۔ ع کے مساوی ہے جہاں ط، مشاہدہ کا کوئی وقت ہے اور ع، ستارہ کا صعود مستقیم ہے۔ سمت و شمال سے مشرق کی طرف ناپا جاتا ہے اور اس لیے ق س ش ۶۰۔ ۳۰۔ و ہے۔ دفعہ ۴ کے چھ تفرقی ضابطے جن میں سے صرف تین غیر تالیف ہیں ذیل کی شکلوں میں لکھے جاسکتے ہیں:

- مف نہ + جم عامف ی۔ جم س مف نہ۔ جب س جم نہ مف و = ۱۔ (۱)
  - مف ی + جم و مف نہ + جم عامف نہ + جم نہ جب و مف س = ۲۔ (۲)
  - مف نہ + جم و مف ی۔ جم س مف نہ + جم نہ جب س مف عا = ۳۔ (۳)
  - مف و۔ جم ی مف عا۔ جب نہ مف س۔ جب س جم نہ مف نہ = ۴۔ (۴)
  - مف س + جب نہ مف عا۔ جب نہ مف و۔ جب عا جم نہ مف ی = ۵۔ (۵)
  - مف نا۔ جم ی مف و + جب نہ مف س۔ جب و جب ی مف نہ = ۶۔ (۶)
- مثلث کے چھ عنصروں میں سے چار چار عنصروں کے اجتماعات پندرہ ہو سکتے ہیں۔ چار کا ہر ایک جٹ ایک مساوات سے مربوط ہوتا ہے (دفعہ ۱)۔ اکثر صورتوں میں جہاں عنصروں کے تغیرات مطلوب ہوتے ہیں دو عنصر مستقل رہتے ہیں اور باقی دو عنصروں کے اضافی تغیرات معلوم کرنے ہوتے ہیں۔ ایسے بہم از، پندرہ مساواتوں میں سے وہ مساوات منتخب کرتے ہیں جس میں دو عناصر جو مستقل ہیں اور وہ دو عناصر جن کے اضافی تغیرات مطلوب ہیں شامل ہوں۔ اگر اس مساوات کو ان دو متغیروں کے واسطے سے تفریق کیا جائے تو مطلوبہ رشتہ مل جاتا ہے۔

مثلاً ہم وہ صورت لیتے ہیں جو اکثر عرض بلد کی تعلیم میں پیش ہوتی ہے جبکہ کسی ستارہ کے راسی فاصلہ کا مشاہدہ کیا جاتا ہے۔ فرض کر دو کہ ایک

ستارہ کا ساعتی زاویہ اور میل صحت کے ساتھ ہمیں معلوم ہیں لیکن مفروضہ راسی فاصلہ میں خطا مفی ہے۔ ہم یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ محصورہ عرض بلد میں کیا خطا واقع ہوگی کیونکہ خطا دار راسی فاصلہ، صحیح ساعتی زاویہ اور میل کے ساتھ استعمال ہوا ہے۔ یہاں چار متعلقہ مقداریں 'س'، 'ضہ'، 'ی'، 'فہ' ہیں اور اس لیے ضابطہ ہے

(۹۴)

جم ی = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم س  
تفرق کرنے اور س اور ضہ کو مستقل فرض کرنے سے

- جب ی مفی = (جم فہ جب ضہ - جب فہ جم ضہ جم س) مفی فہ  
اور مفی فہ کے سر کی بجائے جب ی جم و درج کرنے سے  
مفی فہ = - قط و مفی

بلاشبہ اسے مندرجہ صدر ضابطہ (۲) سے راست 'مفی ضہ' = 'مفی س' = بنا کر حاصل کیا جاسکتا تھا۔

دوسری مثال میں فرض کرو کہ اختلاف منطری زاویہ عاشا شامل ہوتا ہے۔ ہم یہ معلوم کریں گے کہ ایک دئے ہوئے ستارہ کا اختلاف منطری زاویہ عایوئی حرکت کی ابتدا میں کس وقت اعظم ہوتا ہے۔ شرطیں یہ ہیں کہ فہ اور ضہ مستقل ہوں اور س 'ی' اور و اس طریقہ سے متغیر ہوں کہ عایو کوئی تبدیلی نہ ہونے پائے یعنی مفی عامعدوم ہونا چاہئے۔ 'فہ'، 'ضہ'، 'عایو' س پر متعلق ضابطہ یہ ہے

مس فہ جم ضہ = مم عایو س + جب ضہ جم س  
تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(مم عایو س - جب ضہ جب س) مفی س = -

اور چونکہ مفی س کے سر کو معدوم ہونا چاہئے اس لیے مم عایو = جب ضہ مس س جس سے جم و = - اور اس لیے ستارہ اول السمیت پر ہونا چاہئے۔ اس میں ہمیں ان استثنائی صورتوں کی ایک اور مثال ملتی ہے جن میں اگرچہ تین تغیرات صفر ہوتے ہیں لیکن ضابطوں سے یہ لازم نہیں آتا کہ

دوسرے تین تغیر بھی صفر دہوں (دفعہ ۴) -  
یہ تفرقی ضابطے خاص کر یہ دکھانے میں سبق آموز ہیں کہ مشاہدات کو سطح  
مرتب کرنا چاہئے کہ اگر جب اشائے مشاہدہ میں ایک چھوٹی خطا واقع ہوئی ہو  
لیکن اس خطا کے وجود سے اس نتیجہ پر کم سے کم اثر پڑے جس کی ہمیں تلاش ہے۔  
مثلاً فرض کرو کہ طالع اپنا وقت پیا ٹھیک کرنے کی غرض سے سورج کا  
ساعتی زاویہ معلوم کرنا چاہتا ہے۔ جس چیز کی وہ پیمائش کرتا ہے وہ سورج کا  
ارتفاع ہے۔ لیکن انعطاف اور دوسرے اسباب سے جنہیں کوئی تدبیر کلاً  
رفع نہیں کر سکتی اس ارتفاع میں ایک چھوٹی خطا واقع ہوگی اور اس لیے اسی  
فاصلہ کے محسوب کرنے میں خطا واقع ہوگی۔ مشاہدہ اسی فاصلہ کو ی کے طور پر  
پیمائش کر لیتا ہے اور پھر نتیجہ نکالتا ہے کہ ساعتی زاویہ اس ہے۔ لیکن صحیح راستہ  
فاصلہ + م ف ی ہے یعنی م ف ی وہ مقدار ہے جسے مشاہدہ کردہ راستہ  
فاصلہ میں جمع کرنا ہو گا تاکہ صحیح راستہ اسی فاصلہ حاصل ہو۔ اس لیے صحیح ساعتی  
زاویہ اس نہیں ہے بلکہ قدرے مختلف مقدار اس + م ف ی ہے جہاں  
م ف ی وہ تصحیح ہے جو اس پر استعمال کرنی ہوگی پس م ف ی وہ مقدار ہے  
جس کی اب تلاش ہے۔

وہ ضابطہ جس میں صرف اجزاء ی، ف، م، س شامل ہوتے ہیں

یہ ہے

جم ی = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ  
اس کو تفریق کرنے اور فہ اور ضہ کو مستقل سمجھنے سے

- جب ی م ف ی = - جم فہ جم ضہ جب س م ف ی

- جب ا جب ی = جب س جم ضہ درج کرنے سے

- م ف ی = جب ا جم فہ م ف ی

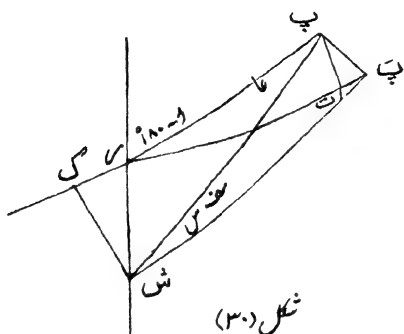
اس لیے م ف ی = - قط فہ قم ا م ف ی

اس ضابطہ کا ہندسی ثبوت حسب ذیل ہے :-

اگر سورج، قطب، ش کے گرد (شکل ۳۰) پ سے پ تک



حرکت کرے تو پ پ چ نکلیں ایک مچھولی قوس ہے اس لئے اس کار اسی فاصلہ س پ سے س پ تک بدلتا ہے۔



(۹۶) اگر پت، سراپ پر عمود ہو تو مفی = پت - چونکہ زاویہ شش پت اور زاویہ سراپ دونوں -۹۰ ہیں، اس لیے زاویہ تپ پت = عا اور مفس جب شش پت = پت پت = مفی قم عا۔ اس لیے اگر شش ک، سراپ پر عمود ہو تو حاصل ہونا چاہئے مفی = مفس جب شش ک جس سے ہمیں اس بات کا علم ہوتا ہے کہ وقت کے لحاظ سے سورج کے راسی فاصلہ کی شرح تبدیلی اس عمود کی جیب کے متناسب ہے جو قطب سے اس انصافی دائرہ پر جو سورج میں سے گزرتا ہے کھینچا گیا ہو۔ نیز

جب شش ک = جب سراپ جب (۱ - ۱۸۰) = - جم نہ جب ۱

جس سے حسب سابق

مف س = - قط فہ قم ا مف ی  
پس مُشاہدے کو ایسے وقت پر عمل میں لانا چاہئے کہ قم ا اتنا چھوٹا ہو جتنا ممکن ہے کیونکہ ایسی صورت میں خطا مف ی ساعستہ زاویہ کی تعیین پر کم سے کم اثر انداز ہوگی۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ا کو ۹۰ یا ۲۷۰ کے قریب ہونا

چاہئے۔ پس علمی قاعدہ جس سے ملاح خوب واقف ہوتے ہیں یہ ہے کہ وقت کی تعیین کے لیے سورج کا ارتفاع اس وقت مُشاہدہ کیا جائے جبکہ سورج اول السمّت پر یا اس کے قریب ہو۔ اگر سورج اول السمّت پر نہ آئے تو مِیْف میں کی کم سے کم قیمت قُطْضہ ہے۔

**مثال ۱۔** مِیْف نہ، مِیْف ی، اور مِیْف نہ کے لیے ضابطوں (۱)

(۲) (۳) کو حل کر کے معلوم کرو کہ ضابطے (۳)، (۵)، (۶) کس طرح اخذ کئے جاسکتے ہیں۔

**مثال ۲۔** ہندسی طور پر ثابت کرو کہ اگر سورج کا مفروضہ میل مِیْف نہ کی مدّٰنک غلط ہو تو سورج کے راسی فاصلہ کے مُشاہدے سے ساعتی زاویے کی تعیین میں مفروضہ میل کی خطا سے جو خطا پیدا ہوگی وہ مم عا قُطْضہ  $\times$  مِیْف نہ ہوگی۔

**مثال ۳۔** کن حالات کے تحت یومی حرکت کی باعث دن بھر ایک ستارہ کے راسی فاصلہ کی تبدیلی اس کے ساعتی زاویے کی تبدیلی کے متناسب ہوگی۔

(۲) سے حاصل ہوتا ہے مِیْف ی \ مِیْف س = جب  $\Delta$  جم نہ اور یہ مستقل ہونا چاہئے، اس لیے  $\Delta$  مستقل ہونا چاہئے اور اس لیے مُشاہدہ خط استوا پر ہونا چاہئے اور ستارہ ایک استوائی ستارہ ہونا چاہئے۔

**مثال ۴۔** اگر معلومہ میل کے کسی جرم فلکی کا راسی فاصلہ مُشاہدہ کیا جائے اور اس راسی فاصلہ سے ساعتی زاویہ تعیین کیا جائے تو ہندسی طور پر ثابت کرو کہ مفروضہ عرض بلد نہ میں ایک چھوٹی خطا مِیْف نہ کی موجودگی ساعتی زاویہ میں۔ مم  $\Delta$  قُطْضہ مِیْف نہ کی خطا پیدا کرے گی جہاں  $\Delta$  السمّت ہے۔

نیز دکھاؤ کہ یہ خطا بالعموم غیر اہم ہوگی بشرطیکہ جرم اول السمّت کے نزدیک ہو۔

قطبی فاصلہ ق س (= ۹۰۔ نہ) راسی فاصلہ س س (= مِی) اور

عرض التمام ق س (= ۹۰۔ نہ) سے مثلث ق س س حاصل ہوتا ہے۔ (شکل ۳۱)۔

اختلاف منظری زاویہ عامفی ہے کیونکہ وہ نصف النہار کے مشرق میں ہے

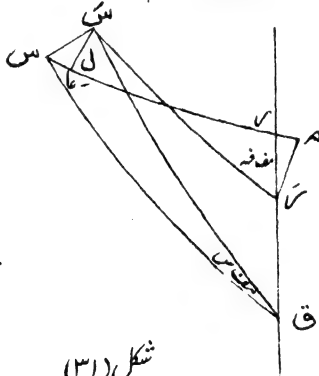
(دفعہ ۳۴)۔

قطبی فاصلہ ق س (= ق س) راسی فاصلہ س س (= س س)

اور عرض التمام ق س (= ۹۰۔ نہ مِیْف نہ) سے مثلث ق س س حاصل ہوتا ہے۔

س اور س ل س پر عمود کھینچو تو چونکہ س س اور س س س  
بہت قریب میں اس لیے س س س = ل س ل کیونکہ س س س = س س س  
اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہئے س ل = س س س -  
زاویہ س س س س س سمت ل ہے اس لیے س ل = س س س - جم ل مف ذہ  
زاویہ ق س س س = عا اور س س س = س ل ق (۹۰ + عا)  
= جم ل ق م عام مف ذہ  
لیکن مف س = س س ق ق س اس لیے  
مف س = جم ل ق ق س ق م عام مف ذہ = م ل ق م مف ذہ

(۹۴)



شکل (۳۱)

مثال ۵۔ میل ضہ کے ایک ستارہ کے راسی فاصلے ی، ی، ی ایسے  
لمحوں پر مشاہدہ کئے گئے ہیں جن کے درمیان وقفہ ۲ تہ ہے۔ بتاؤ کہ عرض القام  
ج مساوات

جب  $\frac{1}{p}$  ج = جب  $\frac{1}{p}$  (ی + لا) جب  $\frac{1}{p}$  طہ ق م ضہ  
سے معلوم ہو سکتا ہے جہاں لا د، ی طہ ضہ اعدادی زاوے ہیں جو مساوی  
(۱) مس لا = م م ضہ جم تہ  
(۲) جب د = جم ضہ جب تہ

(۳) جم ی = جم  $\frac{۱}{۴}$  (ی + ی<sub>۱</sub>) جم  $\frac{۱}{۴}$  (ی - ی<sub>۱</sub>) قطد  
 (۴) جب ط = جب  $\frac{۱}{۴}$  (ی + ی<sub>۱</sub>) جب  $\frac{۱}{۴}$  (ی - ی<sub>۱</sub>) قم ی قم د  
 (۵) مس ص = جب  $\frac{۱}{۴}$  (ی + لا) قم  $\frac{۱}{۴}$  (ی - لا) مس  $\frac{۱}{۴}$  ط  
 [Math. Trip] سے حاصل ہوتے ہیں۔

مثال ۶۔ اگر قطب تارے (Polaris) کا شمال قطبی فاصلہ  
 ف اور اسی فاصلہ ی قطب کے نیچے نصف النہار سے ساعتی زاویہ س پُر مشاہدہ  
 کیے گئے ہوں تو ثابت کرو کہ عرض التمام ع مساواتوں  
 جب ما = جب ف جب س' مس لا = مس ف جم س'  
 مس  $\frac{۱}{۴}$  (ع + لا) = مس  $\frac{۱}{۴}$  (ی + ما) مس  $\frac{۱}{۴}$  (ی - ما)  
 سے معلوم ہو سکتا ہے۔

امدادی زاویوں لا اور ما کی ہندسی اہمیت کیا ہے؟ [Math. Trip.]  
 مثال ۷۔ اگر ایک ستارہ کا میل ضہ اور اس کا اعظم السمیت ۱ ہو تو  
 ثابت کرو کہ اس لمحہ سے جبکہ السمیت ۱ ہے وقت کے ت ثانیوں میں السمیت بقدر  
 قوس کے  $\frac{۱}{۴}$  ۵ ۲ ت ۲ جب ۱ جب ۲ ضہ مس ۱ ثانیوں  
 کے بدل جائے گا۔

اگر السمیت کی قیمت اعظم ہو تو ستارہ قطب اور اس کے درمیان تکبیر  
 کرے گا اور اعظم السمیت کے لیے اس فاصلہ اس چھوٹی قوس پر محاس ہوتا ہے جو  
 ستارہ اپنی ظاہری یومی حرکت میں مرسم کرتا ہے۔

(۹۸) - مم ۱ = جم ف مس ضہ قم مس - جب ف مم س کو تفرق کرنے سے  
 حاصل ہوتا ہے

$$\text{قم ۱ فرس} = \text{جم ف مس ضہ قم مس} - \text{جب ف قم مس}$$

$$= - \text{مم ۱ مم س} - \text{جب ف}$$

$$\text{پھر تفرق کرنے اور فرس} = ۰ \text{ بنانے سے}$$

$$\text{ق}^1 \text{م}^1 = \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^1} = \text{م}^1 \text{م}^1$$

$$\text{اور} \quad \text{مس}^1 \text{ج}^1 \text{ب}^1 = \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^1}$$

اس لیے اعظم سمت کی آن سے ت ثانیوں میں سمت کی تبدیلی  
لا ہوتو

$$\text{ج}^1 \text{ب}^1 = \frac{1}{5} \text{ا}^1 \text{ت}^1 \text{ج}^1 \text{ا}^1 \text{ج}^1 \text{ب}^1 \text{مس}^1$$

۳۶ - کسی جرم فلکی کے تکبّد کا وقت -

بالائی تکبّد کے لمحہ پر (دفعہ ۲۹) جرم کا صعود مستقیم کو کبھی وقت  
ہوتا ہے۔ اس لیے بالائی تکبّد کا وقت معلوم کرنے کا مسئلہ اس مسئلے میں  
تحویل ہو جاتا ہے کہ اس جرم کا صعود مستقیم اُس آن پر معلوم کیا جائے جبکہ  
وہ نصف النہار کو عبور کرتا ہے۔

ستارے کے بالائی تکبّد کا وقت

کسی ستارے کی صورت میں عمل حساب بہت سادہ ہے کیونکہ ظاہری  
صعود مستقیم بہت سست رفتار سے بدلتا ہے اور اس لیے ہم جدولوں سے  
دیکھ کر اس سے ہمیشہ معلوم کر سکتے ہیں اور پھر بالائی تکبّد کا کو کبھی وقت فوراً  
حاصل ہو جاتا ہے۔

مثلاً فرس کرو کہ ہم سماک راج (Areturus) کے مرور کا وقت  
بمقام گرینچ بتاریخ ۱۲ فروری ۱۹۰۷ء معلوم کرنا چاہتے ہیں جو اس مخصوص  
مقصد کے لیے ۱۲ فروری کی ظاہری ظہر سے ۱۳ فروری کی ظاہری ظہر تک  
آسانی سے شمار کیا جاسکتا ہے۔ ایفیرس بابتہ ۱۹۰۷ء میں ہم دیکھتے ہیں کہ  
۱۰ فروری کو بالائی تکبّد کے وقت صعود مستقیم ۱۴ گ ۱۱ ۴۲ ۲۲ ہے۔  
یہ صعود مستقیم ۱۰ دن میں ۲۹ گ ۲۹ بڑھتا ہے اور اس لیے ۱۲ فروری کو تکبّد کے

وقت صعود مستقیم گ ۱۴ ۱۱ ۲۲ ۴۸ ۲۲ ہے۔ اُس دن اوسط ظہر پر پہنچ کا کوکبی  
وقت گ ۲۱ ۲۶ ۹۱ ۲۹ ۲۹ ہے (دفعہ ۶۹)۔  
اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ سماک راجح بتاریخ ۱۲ فروری سنہ ۱۹۰۶ء اوسط  
ظہر کے بعد کوکبی وقت

$$\begin{array}{r} \text{گ} \quad \text{گ} \quad \text{گ} \quad \text{گ} \\ ۲۲ + (۱۴ \quad ۱۱ \quad ۲۲ \quad ۴۸) - (۲۹ \quad ۹۱ \quad ۲۶ \quad ۲۹) = ۱۶ \quad ۴۴ \quad ۵۲ \quad ۵۴ \\ \text{پر نصف النہار پر پہنچے گا۔ ہم اس کوکبی وقت کو اوسط وقت میں جدولوں کے} \\ \text{ذریعہ جو بکری جنتری میں دیجاتی ہیں تحویل کرتے ہیں اس طرح} \\ \begin{array}{r} \text{گ} \quad \text{گ} \quad \text{گ} \quad \text{گ} \\ ۱۶ \quad ۱۵ \quad ۵۴ \quad ۲۲ \quad ۴۳ \\ ۴۴ \quad ۴۳ \quad ۵۲ \quad ۵۱ \quad ۵۰ \\ ۵۲ \quad ۵۱ \quad ۵۰ \quad ۴۹ \quad ۴۸ \end{array} \end{array}$$

اس لیے سماک راجح کا تکبید ۱۲ فروری سنہ ۱۹۰۶ء کو بوقت گ ۱۶ ۴۴ ۵۲ ۵۴ واقع ہوتا ہے۔

(۹۹)

کسی منحرک جرم مثلاً سیارہ یا چاند کی صورت میں صعود مستقیم ساعت  
بہ ساعت تیزی سے بدلتا ہے۔ اس کے تکبید کا وقت معلوم کرنے کے لیے ہم  
حسب ذیل عمل کرتے ہیں۔ مستقیم تین متصل وقت کے وقفوں ت، ت، ت پر  
فرض کرو کہ جرم کا صعود مستقیم تین متصل وقت کے وقفوں ت، ت، ت پر  
عم، عم، عم ہے۔ یہ وقت کے وقفے ایسے ہیں جن کے لیے محسوس قیمتیں  
جدولوں سے ملتی ہیں اور نیز ایسے کہ تکبید ت، اور سنہ کے درمیان واقع ہوتا  
ہے۔ اب مساوی وقفوں ت، ت، یا ت، ت، میں سے کسی ایک کو

وقت کی اکائی کے طور پر لو اور یہ فرض کرو کہ تکبید، ت کے بعد وقت کی ت اکائیوں پر واقع ہوتا ہے تو بینی اور راج کے ذریعہ تکبید کے وقت صعودیہ مستقیم کے لیے حاصل ہوتا ہے

عم + ت (عم - عم) +  $\frac{1}{4}$  ت (ت - ۱) (عم - ۲ عم + عم) یہ جرم کے تکبید کا کوکبی وقت ہوگا۔ فرض کرو کہ وقفہ ت پر کوکبی وقت طہ ہے اور فرض کرو کہ کوکبی وقت میں مذکورہ بالا اکائی کی قیمت ۵ ہے۔ تب تکبید کی آن پر کوکبی وقت ہے

طہ + ۵ ت  
لیکن یہ اُس جملہ کے مساوی ہونا چاہئے جو ابھی اوپر لکھا جا چکا ہے۔ اس لیے

$$\text{طہ} + ۵ \text{ ت} = \text{عم} + \text{ت} (\text{عم} - \text{عم}) + \frac{1}{4} \text{ ت} (\text{ت} - ۱) (\text{عم} - ۲ \text{ عم} + \text{عم})$$

اس مساوات سے ت معلوم کرنا ہوگا۔ مساوات دو درجہ کی ہے لیکن ہمارے مطلب کی اہم اصل صریحاً اس واقعہ سے ظاہر ہو جاتی ہے کہ  $\frac{1}{4}$  ت (ت - ۱) (عم - ۲ عم + عم) ایک چھوٹی مقدار ہے۔ اس لیے اس مساوات کو حل کرنے میں ہم ت کی بجائے تقریبی قیمت ت مساوات

$$\text{طہ} + ۵ \text{ ت} = \text{عم} + \text{ت} (\text{عم} - \text{عم})$$

کو حل کر کے ۰ معلوم کر لیتے ہیں اور پھر ہم اس قیمت ت کو مذکورہ بالا چھوٹی رقم میں داخل کرتے ہیں اور ت کے لیے حسب ذیل مفرد مساوات حل کرتے ہیں

$$\text{طہ} + ۵ \text{ ت} = \text{عم} + \text{ت} (\text{عم} - \text{عم}) + \frac{1}{4} \text{ ت} (\text{ت} - ۱) (\text{عم} - ۲ \text{ عم} + \text{عم})$$

کسی سیارہ کے بالائی تکبید کا وقت

متذکرہ صدر عمل کو واضح کرنے کے لیے ہم مشتری (Jupiter) کے تکبید کا

وقت بمقام گریٹینج بتاریخ ۲۵ ستمبر ۱۹۰۶ء محسوب کریں گے -

بحری جنتری (Nautical almanac) کے صفحہ ۲۳۷ سے ہمیں

حسب ذیل مواد ملتا ہے :-  
 وسط ظہر ۲۵ ستمبر ۱۹۰۶ء  
 مشتری کا صعود مستقیم ۵۳۵۹ گ ۳۹

فرق اول ۲۶۶۹۰ +  
 فرق دوم ۲۰۵۹۶ گ ۳۰

۲۶۶۲۲ +

۲۶۶۵۱ گ ۳۰

(۱۰۰) اس لیے مشتری کا صعود مستقیم ۲۵ ستمبر ۱۹۰۶ء کی ظہر کے ت دن (۱۰۰) بعد یہ ہے

۵۳۵۹ گ ۳۹ + ۲۶۶۹۰ + ۲۰۵۹۶ گ ۳۰ (ت-۱)

تکبیدی کی آن پر یہ صعود مستقیم کو کبھی وقت کے مساوی ہوتا ہے جو یہ ہے

۱۲ گ ۱۳ + ۳۴۵۶۲ + [۵۶۵۵ گ ۳۲]

اس لیے ت کے لیے مساوات حاصل ہوتی ہے

۵۳۵۹ گ ۳۹ + ۲۶۶۹۰ + ۲۰۵۹۶ گ ۳۰ (ت-۱)

= ۱۲ گ ۱۳ + ۳۴۵۶۲ + [۵۶۵۵ گ ۳۲]

دائیں جانب کی آخری رقم کو نظر انداز کرنے اور پہلے حل میں سب ثانیوں کو ترک کرنے سے حاصل ہوتا ہے

۱۸ گ ۲۶ = ت (۳۲ گ ۳)

اس لیے ت = ۵۷۷



ت کی اس تقریبی قیمت کو - ۳۴ ڈ (ت - ۱) میں داخل کرنے سے وہ ۶ ڈ میں تحول ہو جاتا ہے۔

اس لیے مساوات مندرجہ بالا ہو جاتی ہے

$$\text{گ م } ۵۳,۶۵۲۹ + \text{ت } ۲۶,۹۰۱۲ = \text{گ م } ۳۴,۶۲۱۳ + \text{ت } (۵۶,۵۵۲۲)$$

پس 
$$= \frac{18 \text{ گ } 22 \text{ م } 19 \text{ ث}}{24 \text{ گ } 34 \text{ م } 29 \text{ ث}} = 14.464 \text{۔}$$

اس لیے مشتری کا تلبذ نظر کے بعد اوسط شمسی دن کا ۱۶۶۴۱۶.۰ ہے

یعنی گ ۲۳ ۳۲ ۳۸ ش گ - ۱ - و پر (دیکھو کبری جنتری صفحہ ۱۷۲)

چاند کے بالائی ٹکب کا وقت

چاند کی صورت میں حرکت اس قدر تیز ہوتی ہے کہ ساعت بہ ساعت اس کے مقامات جو ایفیمس سے حاصل ہو سکتے ہیں دیکھنے پڑتے ہیں۔ مثلاً ہم وہ وقت محسوب کریں گے جس پر چاند نے بمقام گرہنوج بتایا ۲۹ اکتوبر نصف النہار کو عبور کیا تھا۔

اس دن اوسط ظہر پر کوئبی وقت یہاں ۲۴۲۴۳۵ ہے (بحری)

جنتری ۱۹۶۶ء صفحہ ۱۶۵)۔ چاند کا صعود مستقیم بوقت ظہر (بحری جنتری صفحہ ۱۶۵) گ۔ ۲۳ ۶۲ ۲۳ ہے۔ اگر چاند میں حرکت نہ ہوتی تو اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ چاند کو شام میں تقریباً دس بجے تکبذ کرنا چاہئے۔ دس بجے چاند کا صعود مستقیم تقریباً گ۔ ۲۳ ہے اور اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ظہر اور چاند کے تکبذ کے درمیان وقفہ تقریباً کو کبی وقت کے ۱۰ گ۔ ۱۶ ہے یا اوسط شمسی وقت کے ۱۰ گ۔ ۱۲۔ اس لیے ہم ایفیمرس سے حسب ذیل مواد لیکر چاند کے

تکبد کا وقت معلوم کر لیتے ہیں :-

صعودی تقسیم چاند  
۲۹ اکتوبر ۱۹۰۶ء گھنٹے ۱۰:۰۰ گ ۴۲ ۵۲۵.۳ ش  
فرق اول  
فرق دوم

گھنٹے ۱۱:۰۰ گ ۴۲ ۵۲۵.۳ ش  
۴۲ ۵۲۵.۳ ش  
۵۲۵.۳ ش  
۵۲۵.۳ ش

گھنٹے ۱۲:۰۰ گ ۴۲ ۵۲۵.۳ ش  
۴۲ ۵۲۵.۳ ش  
۵۲۵.۳ ش  
۵۲۵.۳ ش

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ظہر کے بعد (۱۰ + ت) گھنٹوں پر چاند کا صعود (۱۰۱) مستقیم ہے

گ ۴۲ ۵۲۵.۳ ش + ۱۱۶۵.۳ ت - ۵۰.۳ ت (ت - ۱)

چونکہ ت تقریباً  $\frac{1}{4}$  ہے اس لیے آخری رقم تقریباً ایک ثانیہ کا  $\frac{1}{4}$  حصہ ہے اور اس لیے وہ نظر انداز کی جاسکتی ہے۔ اس لیے ت معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل مساوات ملتی ہے

گ ۴۲ ۵۲۵.۳ ش + ۱۱۶۵.۳ ت

= اوسط وقت گ پر کوکبی وقت + ت [۹۵۸۲.۰ ش]

بائیں جانب ت کا ہر ایک اوسط گھنٹے کی کوکبی قیمت ہے۔ زیر بحث یوم میں

اوسط ظہر پر کوکبی وقت ۱۴ گ ۴۲ ۳۷۷ ش ہے۔ اگر اس میں ہم ۱۰ گ ۵۲۵.۳ ش

جمع کریں جو کہ اوسط وقت کے گ کا کوکبی معادل ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ

۱۰ گ - ۱ - وپر کوکبی وقت گ ۴۲ ۵۲۵.۳ ش ہے۔ اس لیے

مساوات بالا ہے

گ ۴۲ م ۳۰ ۵۲۰ ش - گ ۲۹ م ۱۵۹۸ ش = ت (۱ م ۸۶ ۹۰ - ۲ م ۵۶۳۰ ش)

$$ت = \frac{۳۶۵۰۵۰۰ \text{ ش}}{۱۳۵۴۵۸} = ۲۶۳۳۵۹۴$$

یہ سب سے شام کے بعد ایک اوسط گھنٹہ کی وہ کسر ہے جس پر تکبید واقع ہوتا ہے یعنی تکبید کا وقت ۱۰ م ۹۴ ش ہے (بحری جنتری لکھنؤ صفحہ ۱۶)

## طول بلد لہ پر تکبید کا وقت

فرض کرو کہ کسی جرم فلکی کے بالائی تکبید کا وقت بمقام پ معلوم کرنا مقصود ہے جو طول بلد لہ میں گریبونج کے مغرب میں واقع ہے۔  
تکبید کی ان پر جرم کا صعود مستقیم بلاشبہ اس مقام پر کے کو کبھی وقت کے مساوی ہوگا۔ فرض کرو کہ مقامی اوسط وقت ط ہے تو گریبونج پر اوسط وقت اسی آن پر ط + لہ ہوگا اور اس لیے جرم کے صعود مستقیم کو بینی اور اج کے ذریعہ ط + لہ کے ایک تفاعل کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔  
پس ہمیں اوسط وقت ط کے جواب میں صرف پ پر کا کو کبھی وقت معلوم کرنا ہے۔ ایفیمرس سے گریبونج پر اوسط ظہر کے جواب میں کو کبھی وقت ملے گا۔ اس میں

لہ x (اوسط شمسی اور کو کبھی دن کے درمیان فرق کو کبھی وقت میں)

کا اضافہ کرنا ہوگا تاکہ بمقام گریبونج اوسط ظہر پر کو کبھی وقت حاصل ہو۔ اس میں طہ کو بقدر ارض نسبت کے بڑا کر جمع کرنا چاہئے جو اوسط دن کے وقفہ کو کو کبھی دن کے وقفہ سے ہے۔ محصلہ کو کبھی وقت کو صعود مستقیم کے مساوی رکھنے سے طہ معلوم ہو جائیگا۔

مثلاً فرض کرو کہ ہم وہ وقت معلوم کرنا چاہتے ہیں جس پر چاند رصد گاہ

ایک ماؤنٹ سٹیلین کیا لینورنیا کے نصف النہار کو بتاریخ ۲۵ دسمبر ۱۹۰۶ء  
عمور کرتا ہے۔ اس مقام کا طول بلد ۸۶° ۳۴' ۳۹" ہے اور اگر تکبہ کا اوسط  
مقامی وقت طہ ہو تو گرینویچ اوسط وقت ۸۶° ۳۴' ۳۹" + طہ ہے۔

ایلیفیرس سے معلوم ہوتا ہے کہ بتاریخ ۲۵ دسمبر ۱۹۰۶ء گرینویچ اوسط  
نہر پر کوئی وقت ۱۸° ۱۲' ۱۳" ہے اور چاند کا صعود مستقیم گ پر ۱۹۱۸۴۱۹۲ گ

سے ۲۳ گ پر ۳۲۳۳۲۳ گ تک متغیر ہوتا ہے اور یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ  
گرینویچ پر تکبہ تقریباً ۸۲ گ - ۱ - و پرواقع ہوتا ہے۔ بعد کے گھنٹوں

میں چاند کے صعود مستقیم میں تقریباً ۱۵ گ کا اضافہ ہوتا ہے۔ اس لیے ایک  
کی رصد گاہ پر تکبہ تقریباً ۸۳ گ مقامی اوسط وقت پر واقع ہوگا یا تقریباً  
۱۶ گ ۳۳۳۳۳۳ گ گرینویچ اوسط وقت پر۔ پس جدولوں کا وہ حصہ جسے صحیح عمل حساب  
میں استعمال کرنا ہوگا حسب ذیل ہے:-

گ - ۱ - ۲ چاند کا صعود مستقیم فرق اول فرق دوم  
۱۹۰۶ دسمبر ۲۵ گھنٹے ۱۶ گھنٹے ۲ گ ۵۰ ۳۹ ۹۵

۱۴ گ ۵۲ ۲۸ ۵۰ + ۵۵ ۵۵ ۵۵ + ۸۰ ۵۰  
۱۸ گ ۵۲ ۹۱ ۵۰ + ۵۵ ۶۳ ۵۵ + ۸۰ ۵۰

فرض کرو کہ ۸ گ ۶ ۳۴ ۳۹ + طہ = ۱۶ + ت جہاں ت ایک  
گھنٹہ کی کسر ہے۔

تب ط = گ ۵۳ ۵۱۱ ۲۵ + ث

لک کی رصد گاہ پر مقامی اوسط وقت ط کے جواب میں کو کبھی وقت حسب طریقہ ذیل معلوم کیا جاتا ہے -

کو کبھی وقت گریجویٹ  
اوسط ظہر = گ ۱۸ ۱۲ ۲۱ + ث  
لک کا طول بلد

گ ۱۹ ۹۳ ۱۹ + ث = گ ۵۶ ۵۶ ۳ + ث

(گ ۵۳ ۵۱۱ ۲۵ + ث) کو کبھی وقت میں بیان شدہ

گ ۵۴ ۲۲ ۸۸ + گ ۱۹ ۸۶ ۲۱ + ث =

ان تین سطروں کو جمع کرنے سے مقام لک پر چاند کے بالائی ٹکبہ کا کو کبھی وقت

حاصل ہوتا ہے جو = گ ۲۳ ۹۴ ۲۸ + گ ۱۹ ۸۶ ۲۱ + ث

چاند کا صعود مستقیم (۱۶ + ث) گ - ۱ - و پر

گ ۵۰ ۴۳ ۵۰ + ث + (۱۱۵ ۵۵ + ث) - ۴ - ۱ + ث = (۱ - ہے -

چونکہ ت تقریباً ۷ گ ہے اس لیے اس جملہ کی تیسری رقم - ۱ - ۱ - ہے اور ت معلوم کرنے کے لیے مساوات حاصل ہوتی ہے

گ ۲۳ ۹۴ ۲۸ + ث + (۱۹ ۸۶ ۲۱ + ث)

گ ۵۰ ۴۳ ۵۰ + ث + (۱۱۵ ۵۵ + ث) =

ت =  $\frac{۳۵۱۷۸۱۴}{۱۳۶۳۱۵۸}$  = ۰.۲۵۷۱۷۱۰۳ گھنٹے (۱۰۳) یا

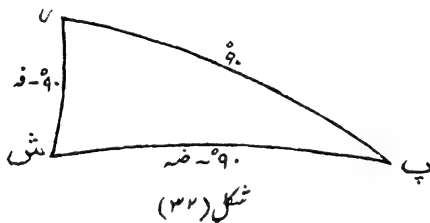
$$150 \times 23 = 3450$$

پس بمقام لک چاند کاتب گ ۱۶ م ۳۵۷ گریبج اوسط وقت

یا گ ۶۸، ۶۹، ۷۰ مقامی اوسط وقت پر واقع ہوا۔

۳۷۔ کسی جرمِ فلکی کا طلوع و غروب۔

کسی جرم فلکی کے طلوع اور غروب ہونے کا وقت بڑی حد تک انعطاف سے متاثر ہوتا ہے۔ ہم انعطاف کے اثر پر کسی آئندہ باب (چھٹے) میں غور کریں گے اور فی الحال اس کو ملتوی کرتے ہیں۔ ہم یہاں وہ مناجبے بیان کریں گے جن سے یہ معلوم ہو گا کہ کوئی جرم فلکی کدھ ہوائی کے اثرات سے قطع نظر کس وقت افق پر یعنی راس سے ۹۰° پر ہوتا ہے۔ شکل (۳۲) میں نقطے مش اور مرا علی الترتیب قطب شمالی اور راس ہیں۔ پ ایک



جواب میں ہوگا اور دوسرا ۶۰° ۲۰'۔ اس جو طلوع کے جواب میں ہوگا بشرطیکہ ستارہ ایسا ہو کہ مشاہد کے عرض بلد پر طلوع اور غروب ہوتا ہو۔  
**مثال ۱۔** ثابت کرو کہ میل ضہ کا کوئی جرم عرض بلد فہ کے مقام پر نہ طلوع ہوگا نہ غروب (لا آنکہ مس فہ مس ضہ > ۱) (بلا لحاظ علامت)۔  
**مثال ۲۔** اگر ایک ستارہ کا شمالی میل ۴۰° ہو تو ثابت کرو کہ کو کبھی دن میں گھنٹوں کی وہ تعداد جن کے اثناء میں ستارہ اُس مقام کے افق کے نیچے ہوگا جس کا عرض بلد ۳۰° ہے ۸۹۱۳۶ ہے۔

**مثال ۳۔** سماک راج کا میل ۹۰° ۱۹' میں ۳۹° ۱۹' ش ہے اور کیمرن کا عرض بلد ۵۲° ۱۳' ہے۔ یہ ستارہ طلوع اور ملکبد کے درمیانی وقفہ میں جس ساعتی زاویہ میں سے حرکت کرتا ہے اُس کو معلوم کرو۔

**مثال ۴۔** فرض کرو کہ ایک ستارہ کے طلوع کا کو کبھی وقت گ اور غروب کا وقت گ ہے اور ستارہ کے محدود ضہ میں۔ ثابت کرو کہ گ = عہ + سہ ادرگ = عہ + سہ جہاں سہ اور سہ مساوات جم سہ =۔۔۔ سہ فہ مس ضہ

کی دو اصلیں ہیں۔

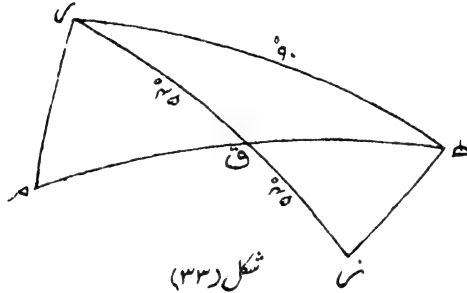
**مثال ۵۔** کن حالات کے تحت ایک ستارہ کا سمت طلوع سے تکبہ تک مستقل رہے گا۔

اگر ستارہ کا سمت مستقل ہے تو اُسے راس میں سے گزرنے والے ایک بڑے دائرہ پر حرکت کرنا چاہئے۔ اس لیے ستارہ سماوی خط استوا پر ہونا چاہئے اور قطب مشاہد کے افق پر ہونا چاہئے یعنی مشاہد راضی خط استوا پر ہونا چاہئے۔  
**مثال ۶۔** اگر عرض بلد فہ اور ایک جرم فلکی کا میل ضہ اور اس کا وہ ساعتی زاویہ ہو جو بوقت طلوع یا غروب حاصل ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ س} = \text{قط فہ} \text{ قط ضہ} \text{ جم} (فہ + ضہ)$$

جبکہ انعطاف کے اثر کو نظر انداز کر دیا گیا ہو۔

مثال ۷۔ ثابت کرو کہ عرض بلد ۵۴° میں وہ وقفہ مستقل ہے جو کسی ستارہ کے مشرقی سمت میں سے گزرنیکے وقت اور اس کے غروب کے وقت کے درمیان ہوتا ہے۔  
فرض کرو کہ ستارہ کا محل جبکہ وہ مشرقی سمت میں ہو م رہے اور فرض کرو کہ اس کا اور قطب ق ہے (شکل ۳۳)۔ تب زاویہ م ر ق = ۹۰°  
ر ق = ۵۴°۔ ر ق کو نہایت اس طرح خارج کرو کہ ق ن = ۵۴° اور فرض کرو کہ کھ (= ۹۰°) م ق ممدودہ کو ہر قطع کرتا ہے۔



چونکہ ر ن = ر کھ = ۹۰° اس لیے زاویہ ر ن کھ = ۹۰° اور اس لیے مثلثات ر ق م اور ر ق کھ میں ر ق = ر ق ن اور م ر ق = کھ ر ق = ۹۰°۔ اس لیے یہ مثلث مساوی ہیں اور م ق = کھ ق اور چونکہ کھ ر اس سے ۹۰° پر ہے اس لیے وہ ستارہ کے غروب کا محل ہے پس ستارہ م سے کھ تک نصف کو کبھی یوم میں حرکت کرتا ہے۔

مثال ۸۔ دو ستارے جن کے میل ضم ضم ہیں مشاہدہ کئے گئے تو معلوم ہوا کہ وہ ایک ہی وقت پر مشرق میں ہوتے ہیں اور نیز ایک ہی وقت پر غروب ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مشاہدہ کے مقام کا عرض بلد ۵۴° ہے اور اگر ستاروں کے طلوع کے وقتوں کے درمیان گھنٹوں کی تعداد ہو تو



$$۲ \text{ جم} = \frac{۱۵ \times ۲}{۳} = (۱+۱ \text{ مس ضم}) + (۱-۱ \text{ مس ضم})$$

قطب سے اُس بڑے دائرہ پر عمود کھینچو جو ان دو ستاروں کو ملتا ہے۔  
اس عمود کا طول یومی حرکت سے متاثر نہیں ہوتا اور اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ  
قطب اول السمیت اور افق سے مساوی فاصلہ پر ہے یعنی اُس مقام کا عرض بلد  
۴۵° ہے۔

نیز وہ وقت جس کے اثناء میں ستارہ افق کے اوپر رہتا ہے غروب کے  
وقت ستارہ کے ساحتی زاویہ کا دگنا ہے یعنی  
۲ جم - (۱ مس فہ مس ضم)

۴۔ اب چونکہ ستارے ایک ساتھ غروب ہوتے ہیں اور فہ = ۴۵° ایسے  
ان کے طلوع کے وقتوں کے درمیان وقفہ  
۲ جم - (۱ مس ضم) - ۲ جم - (۱ مس ضم)  
ہے۔ اس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔

مثال ۹۔ اگر دو ستارے جن کے محدود علی الترتیب عہ ضہ اور  
عہ ضہ ہیں ایک ہی لمحہ پر عرض بلد فہ کے ایک مقام پر طلوع ہوں تو ثابت کرو کہ  
جب (عہ - عہ) مم فہ = مس ضہ + مس فہ - ۲ مس ضہ مس فہ جم (عہ - عہ)  
مثال ۱۰۔ اگر کرہ سماوی کا رقبہ ۱ ہو تو ثابت کرو کہ کسی عرض بلد  
فہ میں رہنے والے مشاہد کے لیے ایک حصہ (جب ۱ فہ میں کے ستارے  
کبھی بھی اس کے افق کے اوپر نہیں ہوں گے دوسرے حصہ (جب ۱ فہ  
میں کے ستارے ہمیشہ اس کے افق کے اوپر ہوں گے) حصہ ۱ جم فہ میں کے  
ستارے روزانہ طلوع و غروب ہوں گے اور حصہ (جم ۱ فہ میں وہ سب  
ستارے آجائیں گے جن سے وہ واقف ہو سکتا ہے۔

اگر ایک کرہ کا نصف قطر ۱ ہو تو اس کا وہ رقبہ جو نصف قطر فہ کے  
ایک چھوٹے دائرہ سے منقطع ہوتا ہے ۲۲ (۱-۱ جم فہ) ہے۔ شمالی اور

جنوبی قطبوں کے گرد نصف قطر فہ کے چھوٹے دائرے کوہ کے وہ حصے قطع کریں گے جو علی الترتیب ہمیشہ افق کے اوپر اور ہمیشہ افق کے نیچے رہیں گے۔  
**مثال ۱۱۔** ایک مقام پر جس کا شمالی عرض بلد ۴۰ ہے دو ستارے جن کے ش - ق - ف (شمال قطبی فاصلے) علی الترتیب ف اور ف ہیں ایک ساتھ طلوع ہوتے ہیں اور پہلا ستارہ نصف النہار پر اس وقت آتا ہے جبکہ دوسرا غروب ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس فہ}}{\text{مس ف}} = ۱ - \frac{\text{مس ۲ فہ}}{\text{مس ۲ ف}}$$

یہ ظاہر ہے کہ اگر دوسرے ستارے کا ساختی زاویہ بوقت طلوع سے ہو تو پہلے ستارہ کا ساختی زاویہ ۲۰ سے ہونا چاہئے، اس لیے

$$۰ = \text{جم ف جب فہ} + \text{جب ف جم فہ} \text{ جم ۲ ف}$$

$$۰ = \text{جم ف جب فہ} + \text{جب ف جم فہ} \text{ جم ۲ ف}$$

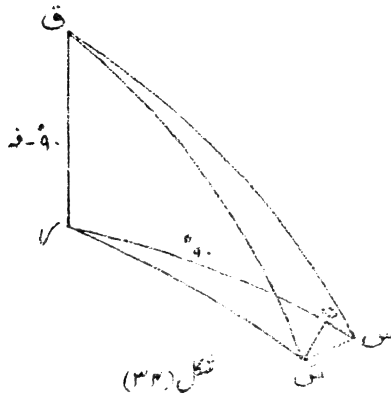
ان مساواتوں سے س کو ساقط کریں تو مطلوبہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔

**مثال ۱۲۔** اگر کسی آن پر فو کو کے رفاص کا اہترازی مستوی ایک ستارہ میں سے گذرے جو افق کے قریب ہو تو ثابت کرو کہ جب تک یہ ستارہ افق کے قریب رہیگا اہترازی مستوی ستارہ میں سے گذرنا رہے گا۔

فو کو کے رفاص کا مستوی انتصابی کے گرد ایک ایسی زاوی رفا سے گردش کرتا نظر آتا ہے جو کوہ سماوی کی زاوی رفا کو عرض بلد کی جیب سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔ وقت کے چھوٹے وقفہ فرت میں ستارہ (شکل ۳۴) قوس مس مس پر مس تک حرکت کرتا ہے جہاں (۱۰۶) مس مس = جم فہ فرت۔ اگر س مس پر مس ت عمود ہو تو

$$\text{مس ت} = \text{مس مس جب مس مس ت} = \text{جم فہ جم عافرت} = \text{جب فہ فرت}$$

$$\text{اس لیے مس س مس} = \text{جب فہ فرت}$$



### ۳۸ - سماوی عرض بلد اور طول بلد - بعض خاص قسم کی تحقیقات

میں کروئے سماوی پر محدودوں کے ایک اور نظام کو استعمال کرنا پڑتا ہے۔ جس طرح خط استوا سے وہ ذرائع ہٹا ہوتے ہیں جن سے کسی ستارہ کے صعود مستقیم اور میل کی تعریف عمل میں آتی ہے۔ عین اسی طرح طریق الشمس کو محدودوں کے ایک نظام کی اساس قرار دیا جاتا ہے، یہ محدود سماوی طول بلد اور عرض بلد کے نام سے مشہور ہیں۔ اس محل کا نقطہ  $\gamma$  وہ مبدا ہے جہاں سے طول بلد کی پیمائش عمل میں آتی ہے اور پیمائش کی سمت وہ رکھی جاتی ہے جو طریق الشمس پر سورج کی ظاہری سالانہ حرکت کی ہے جیسا کہ شکل (۳۵) میں ایک تیر کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

طریق الشمس کے شطب گ سے ایک بڑا دائرہ ستارہ سس میں سے گذرنا ہوا کھینچا جاتا ہے اور اس بڑے دائرہ کا مقطع ح سس جو ستارہ اور طریق الشمس کے درمیان ہے وہ محدود ہے جسے ستارہ کا عرض بلد کہتے ہیں۔ یہ عرض بلد مثبت ہوگا اگر ستارہ اس نیم کرہ میں واقع ہو جس میں طریق الشمس کا شطب ہے اور منفی ہوگا اگر ستارہ اس نیم کرہ میں واقع ہو جس میں طریق الشمس کا

فصل شطب ہے۔ - مبداء ۷ سے عمود کے پائین تک طریقی الشمس کی جو قوس ہے اُسے ستارہ کا طول بلد کہتے ہیں جو دوسرا عدد ہے۔ اس کو (۱۰۰) طریقی الشمس پر ۶۰ سے ۳۶۰ تک ناپا جاتا ہے، اس طرح اگر طریقی الشمس کسی جرم کا صعود مستقیم بڑھ جائے تو اس کا طول بلد بھی بڑھ جاتا ہے۔

ہم بلاشبہ اس امر کا مشاہدہ کریں گے کہ نقطوں عرض بلد اور طول بلد کے معنی جو یہاں پیشی مفہوم میں سمجھائے گئے ہیں ان الفاظ کے ان معنوں سے بالکل مختلف ہیں جو ارضی معاملات کے لحاظ سے بالعموم مستعمل ہیں۔ پیشی عرض بلد کو بہ سے اور پیشی طول بلد کو لہ سے بالعموم تعبیر کیا جاتا ہے۔ پس ۷ ت = لہ اور ۷ ت = بہ اور طریقی الشمس کے دائرہ انقلابین کی قوس لی ۵ جو خط استوا اور طریقی الشمس کے درمیان منقطع ہوتی ہے طریقی الشمس کے میلان کے مساوی ہے۔

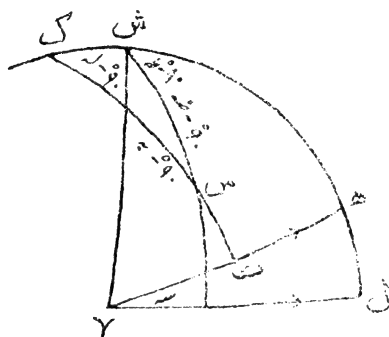
اگر مں کا صعود مستقیم ۷ اور میل ضہ ہو تو استحالہ کے ضابطے دفعہ ۱۲ کے عام ضابطوں سے حاصل ہو سکتے ہیں یا راست مثلث مں گ مش سے (شکل ۳۵) اور عرض بلد اور طول بلد کی تعین کے لیے ہمیں حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں :-

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جب بہ} = \text{جم} \text{ سے جب ضہ} - \text{جب سے جم ضہ جب عہ} \\ \text{جم بہ جب لہ} = \text{جب سے جب ضہ} + \text{جم سے جم ضہ جب عہ} \dots (۱) \\ \text{جم بہ جب لہ} = \text{جم ضہ جب عہ} \end{array} \right.$$

ان مساواتوں سے ہم بہ اور لہ معلوم کر سکتے ہیں جبکہ عہ اور ضہ دئے گئے ہوں۔ مسئلہ کی نوعیت سے بالعموم یہ معلوم کر لینا آسان ہو گا کہ طول بلد ۸۰ اُسے بڑا ہے یا چھوٹا۔ جب یہ معلوم ہو جائے تو آخری دو مساواتوں میں سے کسی ایک کو خارج کر سکتے ہیں۔

ہم لو کارنٹی عمل کے لیے ان مساواتوں کو ایک امدادی مقدار

(۱۰۸) م = زاویہ س ۲ لی کے ادخال سے زیادہ سہولت بخش بنا سکتے ہیں،  
اس طرح س م = قمری مس ضد (دفعہ ۱۳) اور



ان مساواتوں سے لہ اور بہ اور نیز ح متعین کئے جاسکتے ہیں -  
اگر اس کا معکوس مسئلہ حل کرنا ہو یعنی اگر صعود مستقیم اور میل معلوم کرنا  
ہو جبکہ طول بلد اور عرض بلد دئے گئے ہوں تو (۱) کے احتمال سے حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جب نہ} = \text{جم سہ جب بہ} + \text{جب سہ جم بہ جب لہ} \\ \text{جم نہ جب عہ} = \text{جب سہ جب بہ} + \text{جم سہ جم بہ جب لہ} \dots (۲) \\ \text{جم نہ جم عہ} = \text{جم بہ جم لہ} \end{array} \right.$$

مثال ۱ - ثابت کرو کہ طریق الشمس کے شطب کا صعود مستقیم اور میل  
علی الترتیب ۲۰۰ اور ۹۰ - سہ ہیں اور یہ کہ ضد شطب کا صعود مستقیم اور میل ۹۰  
اور سہ - ۹۰ ہیں -

مثال ۲ - اگر طریق الشمس کے الشمس نقطہ کا صعود مستقیم اور  
میل عہ، ضد ہوں جس کا طول بلد لہ ہے تو ثابت کرو کہ  
جم لہ = جم عہ جم ضد  
جب لہ جب سہ = جب ضد

مثال ۳ - اگر دو ستاروں کے صعود مستقیم اور میل علی الترتیب  
عہ، ضد اور عہ، ضد ہوں اور ان کا طول بلد ایک ہی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب (عہ - عہ) = مس سہ (مس ضد جم عہ - مس ضد جم عہ)}$$

مثال ۴ - جبار (عہ) (α Orionis) کا صعود مستقیم ۵۹° ۴۴' اور اس کا میل + ۲۳° ۲۳' ہے اور طریق الشمس کا میلان ۳۳° ۲۰' ہے - ثابت  
کرو کہ اس ستارہ کا طول بلد اور عرض بلد علی الترتیب ۸۰° ۱۰' اور ۲۱۶° ۲۱' ہیں -  
مثال ۵ - اگر عہ = ۹۰° ۳۳' ضد = ۱۶۰° ۲۲' ۳۵' اور  
سہ = ۲۳° ۲۰' ۳۲' تو ثابت کرو کہ

$$\text{لہ} = ۳۵۹° ۱۰' ۴۴' - = ۱۰۰° ۳۵' ۳۰'$$

## پانچویں باب مختلف مثالیں

**مثال ۱۔** ثابت کرو کہ زمین کے شمالی قطب پر رہنے والے مشاہد کے لیے کسی ستارہ کا ارتفاع اس کا میل ہوگا اور وہ یومی حرکت سے غیر متغیر رہے گا۔ نیز اسی صورت میں ثابت کرو کہ کسی ستارہ کا سمت (جو کسی ثابت نصف النہار سے ناپا گیا ہو) اس کے صعود مستقیم سے صرف بقدر ایک قوس کے فرق رکھے گا جو کسی دن ہونے پر سب ستاروں کے لیے وہی ہوگی۔

**مثال ۲۔** صعود مستقیم اور میل منہ کے ایک ستارہ کا عرض بلد بہ چھوٹا ہے۔ ثابت کرو کہ سورج کا طول بلد جبکہ اس کا صعود مستقیم عہ ہوا ستارہ کے طول بلد سے بقدر بہ جیب منہ مم عہ (تقریباً) کے فرق رکھتا ہے۔

**مثال ۳۔** ثابت کرو کہ منطقہ بارہ شمالی یا منطقہ بارہ جنوبی کے اندر کسی مقام کے لیے افق اور طرہ رقی الشمس کے نقاط تقاطع ایک کو کبھی یوم میں افق کے گرد پوری گردش کرتے ہیں لیکن کسی دوسرے مقام کے لیے یہ نقطے مشرق اور مغرب کے نقطوں کے گرد اہتمز کرتے ہیں۔

**مثال ۴۔** مشرق کے نقطہ کو م سے، قطب کو ق سے اور دو ستاروں کے مقامات کو (ا اور ب سے تعبیر کیا گیا ہے۔ ق (مرب سے (ا پر ملتا ہے اور ق ب (مرب سے (ب پر ملتا ہے۔ (ب (ب کے میل علی الترتیب ضم، ضم، ضم، ضم ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس} \text{ ضم} \text{ مس} \text{ ضم} = \text{مس} \text{ ضم} \text{ مس} \text{ ضم}$$

فرض کرو کہ م (ا اور م ب نصف النہار کو قطب سے علی الترتیب فاصلوں لہ، مہ پر قطع کرتے ہیں۔ اب چونکہ م، نصف النہار کا قطب ہے اس لیے مس (ا، مس مہ = مس ضم (ا، مس ضم مہ اور مس م (ا، مس ضم (ا = مس ضم (ا، مس ضم مہ

**مثال ۵۔** اگر مقام دب پر ایک ستارہ کار اسی فاصلہ ی ہو تو اسی آن ایک دوسرے مقام دب پر جو دب سے چھوٹے فاصلہ ف پر واقع ہے اس ستارہ کار اسی فاصلہ ی ہوگا جہاں

$$Y = Y - F \text{ جم طه} + \frac{1}{4} F \text{ جب احم ی جب طه}$$

جس میں طه و د فرق ہے جو ستارہ اور دب کے سمتوں کے درمیان ہے جبکہ انہیں دب سے دیکھا جاتا ہے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ ی۔ ی اور ف دونوں قوس میں بیان کئے گئے ہیں، اس لیے نیم قطری زاویوں میں ان کے ناپ علی الترتیب (ی۔ ی) x جب آ اور ف جب آ ہیں۔ پس

$$\text{جم ی} = \text{جم ی جم ف} + \text{جب ی جب ف جم طه}$$

$$= \text{جم ی (ا۔ ا۔) } \frac{1}{4} F \text{ جب آ} + F \text{ جب آ جب ی جم طه}$$

لیکن

$$\text{جم ی} = \text{جم (ی۔ ی) جم ی۔ جب (ی۔ ی) جب ی}$$

$$= \text{جم ی} \left\{ \frac{1}{4} - (ی۔ ی) \text{ جب آ} \right\} - (ی۔ ی) \text{ جب آ جب ی}$$

جم ی کی ان دو قیمتوں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$Y = Y - F \text{ جم طه} + \frac{1}{4} F \text{ جب آ م ی} - \frac{1}{4} (Y - Y) \text{ جب آ م ی}$$

پہلے تقریب کے طور پر ی۔ ی = ف جم طه حاصل ہوتا ہے اور آخری رقم میں اس کو درج کرتے سے مطلوبہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔

**مثال ۶۔** فرض کرو کہ افق پر کے ایک نقطہ کا سمت 'میل' اور اختلاف منظری زاویہ علی الترتیب  $\phi$  و  $\theta$  عا ہیں۔ ثابت کرو کہ دے ہوئے عرض بلد  $\phi$  کے لیے یہ مقادیر حسب ذیل مضابطوں کے ذریعہ کسی ساعتی زاویہ (۱۱۰)



س کے لیے محسوب کی جا سکتی ہیں :-  
 مس ضہ = مم فہ جم س، جب ا = جب س جم ضہ، جم ا = قفہ جب ضہ  
 مس ا = جب فہ س جم عا = جب فہ قفہ ضہ، جب عا = جب س جم فہ  
 مثال ۷ - اگر ایک ستارہ کامیل اور ساعتی زاویہ علی الترتیب ضہ س  
 ہوں تو حسب ذیل ضابطے حاصل کرو جن سے اس کا سمت ا اور اسی فاصلہ  
 ی آسانی سے معلوم ہو سکیں جبکہ عرض بلد فہ کے لیے ا، ضہ، عا (حسب تعریف  
 مندرجہ مثال مابقی) کی قیمتیں ساعتی زاویہ س کے جواب میں معلوم ہوں -

جم ی = جب (ضہ - ضہ) جم عا  
 جب (ا - ا) جب ی = جب (ضہ - ضہ) جب عا  
 جم (ا - ا) جب ی = جم (ضہ - ضہ)  
 مثال ۸ - پچھلی مثال میں مستعملہ مقداروں کو لیکر ثابت کرو کہ ستارہ  
 کا اختلاف مغربی زاویہ عا معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں :-  
 جب عا = جب (ا - ا) قم (ضہ - ضہ)

جم عا = مم عا مم (ضہ - ضہ)  
 مثال ۹ - امثالہ ۶ اور ۷ کے ضابطوں کی مثال کے طور پر پاک راج  
 کا رہی فاصلہ اور سمت ساعتی زاویہ گ ۳۵ گ پیر معلوم کرو جبکہ یہ دیا گیا ہو کہ  
 میل + ۱۹ ۴۴ اور عرض بلد ۵۲ ۱۳ ہے -

مثال ۱۰ - بتاؤ کہ قطبی ستارہ کے ارتفاع ا کا مشاہدہ کرنے سے  
 جس کا ساعتی زاویہ مشاہدہ کے وقت س اور قطبی فاصلہ ق یہ عرض بلد فہ کو  
 متعین کیا جا سکتا ہے اور یہ کہ عرض بلد معلوم کرنے کا ضابطہ تقریبی طور پر حسب ذیل ہے

$$فہ = ا - ق جم س + \frac{۱}{۴} جب ا ق جب س مس ا$$

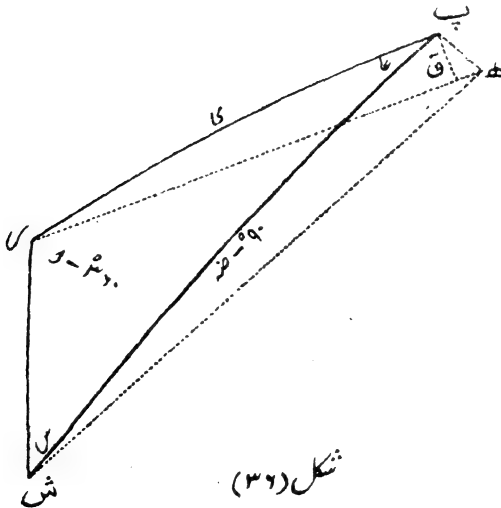
مثال ۱۱ - بتاؤ کہ ایک ستارہ کے ساعتی زاویہ س یا ر اسی فاصلہ  
 ی کو جبکہ وہ مشرقی سمت یا مغربی سمت پر ہو مساواتوں  
 جب ضہ = جب فہ جم ی، جب س جم ضہ = جب ی، جم س جم ضہ = جم فہ جم ی

سے معلوم کر سکتے ہیں۔ پہلی صورت میں اوپر کی علامت اور دوسری صورت میں نیچے کی علامت استعمال کی جائے۔

**مثال ۱۲۔** کسی ستارہ کے راسی فاصلہ کا پہلا اور دوسرا تفرقی سر بلحاظ ساعتی زاویہ سے معلوم کرو۔

ہم اس کی تحقیق اس سی ضابطوں سے یا ہندسی طور پر حسب ذیل کر سکتے ہیں (شکل ۳۶)۔ فرض کرو کہ قطب شمالی 'ن' راس 'س' اور ستارہ 'پ' ہے۔ وقت فرس میں ستارہ 'ھ' تک حرکت کر چکا ہو گا جہاں 'پ' 'ھ' 'ن' 'پ' اور 'ن' 'ھ' پر عمود ہے۔ اگر 'پ' 'ق'، 'س' 'ھ' پر عمود ہو تو  
فری = ھ ق = ھ پ جب عا = جم ضد جب عا فرس = جم ضد جب ا فرس

نیز  
فر ۱ = پ ق ق م ی = پ ھ جم عا ق م ی = جم ضد جم عا ق م ی فرس  
اس لیے  $\frac{فر ۱}{فرس} = \frac{جم ضد جم عا ق م ی}{جم ضد جم عا ق م ی}$



شکل (۳۶)

(۱۱) دو سراتفرقہ معلوم کرنے کے لیے ہم  $\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}$  کو جو اوپر حاصل ہوا چکا ہے اس کے لحاظ سے تفریق کرتے ہیں اور یہ فرض کرتے ہیں کہ  $\frac{1}{\text{فرس}}$  اور اس دونوں نیم قطری زاویوں میں بیان ہوتے ہیں۔ اس طرح

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرس}} = \text{جم نہ جم} \frac{1}{\text{فرس}}$$

$$= \text{جم نہ جم} \frac{1}{\text{جم نہ جم عا ق م ی}}$$

مثال ۱۳۔ اگر ایک ستارہ کانیل عرض بلد سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ راسی فاصلہ میں یومی حرکت کی باعث جو تبدیلی ہوتی ہے اس کی تیز ترین شرح میل کی جیب التمام کے مساوی ہے۔ اگر میل عرض بلد سے کم ہو تو ثابت کرو کہ راسی فاصلہ میں تبدیلی کی تیز ترین شرح عرض بلد کی جیب التمام کے مساوی ہے۔  
مثال ۱۴۔ اگر ایک جرم کا راسی فاصلہ ساعتی زاویہ سے  $\frac{1}{\text{س}}$  پر کی ہو اور اس کا راسی فاصلہ ساعتی زاویہ سے  $\frac{1}{\text{س}}$  پر کی ہو جہاں  $\frac{1}{\text{س}}$  سے بہت قریب ہے تو مثال ۱۲ سے ثابت کرو کہ

ی۔ ی۔ = ۱۵ (س۔ س) جم نہ جم  $\frac{1}{\text{س}}$  جب ۲۲۵ (س۔ س) جم نہ جم  $\frac{1}{\text{س}}$  جم نہ جم عا ق م ی جس میں راسی فاصلہ قوس میں اور ساعتی زاویے وقت میں بیان کئے گئے ہیں۔  
مثال ۱۵۔ متواتر ساعتی زاویوں  $\frac{1}{\text{س}}$ ،  $\frac{1}{\text{س}}$ ، ...،  $\frac{1}{\text{س}}$  پر جو بہت قریب قریب ہیں ایک ہی ستارہ کے راسی فاصلوں  $\frac{1}{\text{س}}$ ،  $\frac{1}{\text{س}}$ ، ...،  $\frac{1}{\text{س}}$  کا ایک سلسلہ حاصل کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ راسی فاصلوں اور ساعتی زاویوں کے حسابی اوسطی  $\frac{1}{\text{س}}$  ہیں۔ ثابت کرو کہ  $\frac{1}{\text{س}}$  کے جواب میں  $\frac{1}{\text{س}}$  کی قیمت  $\frac{1}{\text{س}}$  اس طور پر حاصل ہوتی ہے کہ  $\frac{1}{\text{س}}$  پر تصحیح

$$+ \frac{1}{\text{س}} ۲۲۵ \text{ جب } \frac{1}{\text{س}} \text{ جم نہ جم} \frac{1}{\text{س}} \text{ جم نہ جم عا ق م ی} \frac{1}{\text{س}} (\text{س۔ س})$$

عمل میں لائی جائے۔

رکھو ۱ = جم نہ جب ۱ ب =  $\frac{1}{4} \times ۲۲۵$  جب آجم نہ جم ۱ جم نہ جم عاقمی (۱۱۲)  
تو آخری مساوات (مثال ۱۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$۱ = ی + ۱ (س - س) + ب (س - س) \quad (۱)$$

$$۱ = ی + ۱ (س - س) + ب (س - س) \quad (۲)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$۱ = ی + ۱ (س - س) + ب (س - س) \quad (۳)$$

جمع کرنے اور ن سے تقسیم کرنے پر

$$۱ = ی + \frac{۱}{۴} ب \quad (س - س)$$

جس سے مسئلہ ثابت ہے -

یہ ضابطہ اس وقت مفید ہوتا ہے جبکہ اسی فاصلوں کے ایک سلسلہ سے جو بہت جلد جلد متواتر مشاہدہ کئے گئے ہوں بہترین نتیجہ حاصل کرنا مقصود ہو

مثال ۱۶ - اگر میل نہ کے ایک ستارہ کا ساعتی زاویہ س ہو جبکہ اس کا سمت ۱ ہے اور س ہو جبکہ اس کا سمت ۱۸۰ ہے تو ثابت کرو کہ عرض بلد نہ مساوات

$$\text{مس نہ} = \text{مس نہ} \quad \frac{\text{جم} \frac{1}{4} (س + س)}{\text{جم} \frac{1}{4} (س - س)}$$

سے معلوم کیا جاسکتا ہے -

مثال ۱۷ - شمالی عرض بلد ۴۵° میں ایک مائل قطبی ستارہ کا بڑے بڑا سمت افق کے شمالی نقطہ سے ۴۵° حاصل ہوتا ہے - ثابت کرو کہ اس ستارہ کا قطبی فاصلہ ۳۰° ہے -

**مثال ۱۸ -** بتاؤ کہ مقامی کو کبھی وقت کا مشاہدہ کرنے سے جبکہ دو معلومہ ستاروں کا سمت ایک ہی ہو عرض بلد کس طرح معلوم کیا جاسکتا ہے۔ وہ سمتی زاوے 'س' میں جن پر ان دو ستاروں کا سمت لگے ہے معلوم ہیں اور (صفحہ ۳)

مم ل جب س = - جم فہ مس ضہ + جب فہ جم س  
مم ل جب س = - جم فہ مس ضہ + جب فہ جم س  
پس اس قضا کرنے پر

مس فہ = مس ضہ جب س - مس ضہ جب س  
جب (س - س)

**مثال ۱۹ -** سورج کے دو ارتفاع بہ اور بہ + مف بہ ایک ساتھ دو قریب کے مقامات سے جو ایک ہی نصف النہار پر ہیں اُس وقت مشاہدہ کئے گئے جبکہ سورج کا میل ضہ ہے۔ اگر ان میں سے ایک مقام کا عرض بلد نہ ہو تو ثابت کرو کہ ان کے عرض بلدوں کا فرق تقریباً مف بہ جم بہ جم فہ \} جب ضہ - جب بہ جب فہ \}

[Coll. Exam.]

**مثال ۲۰ -** ثابت کرو کہ اگر اول سمت میں سورج کا ارتفاع عہ ہو، اس کا طول بلد ل اور طریق الشمس کا میلان مہ تو مقام کا عرض بلد حسب ذیل ہوگا

جب' (جب مہ جب ل \} جب عہ)  
**مثال ۲۱ -** عرض بلد فہ کس طرح ٹھیک طور پر معلوم کیا جاسکتا ہے اگر معلومہ میل ضہ کے ایک جرم کا اسی فاصلہ اُس وقت مشاہدہ کیا جائے جبکہ وہ نصف النہار سے قریب ہو۔ فہ کی ایک تقریبی قیمت فہ = ی + ضہ مان لی گئی ہے۔

اسی ضابطہ جم ی = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم س  
جم (فہ - ضہ) - ۲ جب' ۱/۲ س جم فہ جم ضہ

سے حاصل ہوتا ہے

جب  $\frac{1}{4}$  (ی + ضہ - فہ) جب  $\frac{1}{4}$  (ی - ضہ + فہ) = جم ضہ جم فہ جب  $\frac{1}{4}$  اس  
جس میں ساعتی زاویہ س، مقامی کو کبھی وقت اور جرم کے صعود مستقیم سے معلوم  
ہو سکتا ہے۔ اگر ہم لا = ی + ضہ - فہ رکھیں تو

$$\text{جب } \frac{1}{4} \text{ لا} = \frac{\text{جم ضہ جم فہ}}{\text{جب (فہ - ضہ + } \frac{1}{4} \text{ لا)}} \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ س}$$

لیکن جرم چونکہ نصف النہار کے قریب ہے اس لیے لا چھوٹا ہے، اس لیے  
تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے (دفعہ ۳ مثال ۳)

$$\text{لا} = \frac{\text{جم ضہ جم فہ جب } \frac{1}{4} \text{ س}}{\text{جب (فہ - ضہ) جب (فہ - ضہ + } \frac{1}{4} \text{ لا)}} \text{ (قط } \frac{1}{4} \text{ لا)}$$

یا ضا =  $\frac{\text{جم ضہ جم فہ جب } \frac{1}{4} \text{ س}}{\text{جب (فہ - ضہ) جب (فہ - ضہ + } \frac{1}{4} \text{ لا)}} \text{ رکھنے اور یہ دیکھنے سے کہ ضا، لا}$   
سے بہت قریب ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

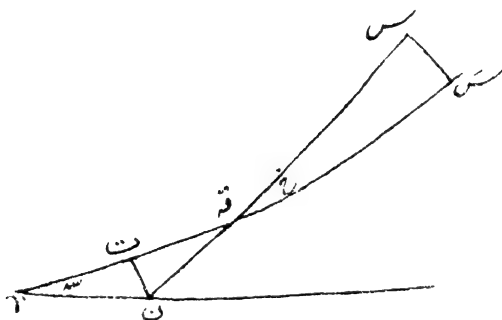
$$\text{لا} = \text{ضا} \frac{\text{جب (فہ - ضہ)}}{\text{جب (فہ - ضہ + } \frac{1}{4} \text{ ضا)}} \text{ (قط } \frac{1}{4} \text{ ضا)}$$

جس سے فہ = ی + ضہ - لا معلوم ہو جاتا ہے۔

مثال ۲۲ - اگر سورج کا سمتی نیم قطر س ہو، اس کے اصلی طول بلد  
اور عرض بلد، یہ ہوں، طریق الشمس کا میلان سہ ہو، لا وہ محدود ہو جو  
زمین کے مرکز سے اصلی اعتدال سر تا تک کھینچے ہوئے خط پر ناپا گیا ہے،  
ضہ وہ محدود ہو جس کی اس خط پر پیمائش کی گئی ہے جو خط استواء  
کے مستوی میں لا پر عمود ہے اور سرطان کے پہلے نقطہ کی جانب ہے یعنی اس  
نقطہ کی جانب جس کا صعود مستقیم ۶ ہے، اور بالآخر سے وہ محدود ہو جو خط استواء  
پر عمود ہے اور قطب شمالی کی جانب ہے تو ثابت کرو کہ (بحری جہتہری لائنہ

لا = سراجم لہ  
 ما = سراجب لہ جم سہ - ۱۹۵۳ سراجب  
 مے = سراجب لہ جب سہ + ۲۲۵۵ سراجب  
 جہاں سورج کا اوسط فاصلہ طول کی اکائی ہے اور عددی سر اعشاریہ کے  
 ساتویں مقام کی اکائیوں میں ہیں -  
 استحالہ کے عام ضابطوں کی رو سے  
 جب ضد = جب بہ جم سہ + جم بہ جب سہ جب لہ  
 جم ضد جم عہ = جم بہ جم لہ  
 جم ضد جب عہ = - جب بہ جب سہ + جم سہ جم بہ جب لہ  
 اس لیے لا = سراجم بہ جم لہ  
 ما = - سراجب بہ جب سہ + سراجم بہ جم سہ جب لہ  
 مے = سراجب بہ جم سہ + سراجم بہ جب سہ جب لہ  
 سورج کی صورت میں بہ بہت چھوٹا ہوتا ہے اور جب بہ = بہ جب لہ  
 جب سہ = ۳۹۸۰ اور جم سہ = ۹۱۷۴ رکھنے سے ہمیں مطلوبہ نتیجہ حاصل  
 ہوتا ہے - سال بھر کے ہر دن کے لیے لا، ما، مے کی جدولیں ایفیمرس  
 میں دی ہوئی ہوتی ہیں -  
 مثال ۲۳ - یہ مان کر کہ کہکشاں ستاروں کا ایک بڑا دائرہ  
 ہے جو خط استواء کو صعود مستقیم ۸۰ گم میں قطع کرتا ہے اور اس کے  
 ساتھ زاویہ ۶۵° (شمالی جانب پیمائش کردہ) بناتا ہے، کہکشاں کے قطب کا  
 صعود مستقیم اور میل معلوم کرو -  
 مثال ۲۴ - ایک سیارہ کا شمس مرکزی مدار طریقی الشمس سے  
 چھوٹے زاویہ رخ پر میل ہے - ثابت کرو کہ اگر اس کا میل اعظم ہو تو یا تو اس کی  
 عرض بلد میں حرکت صفر ہوتی ہے یا اس کا طول بلد تقریباً ۹۰° + رخ مم سہ جب عہ  
 ہے جہاں عہ، صعودی عقدہ کا طول بلد ہے -  
 چونکہ میل اعظم ہے اس لیے سیارہ سس، خط استواء کے ساتھ اس کے

مدار کے نقطہ تقاطع ن سے ۹۰ پر ہونا چاہئے۔ طریقی اشمس پر ن س کا  
ظل بھی تقریباً ۹۰ ہوگا۔ فرض کرو کہ ن سے طریقی اشمس ۲ قہ پر عمود  
ن ت ہے جہاں ۲ اعتدال سر ہے اور قہ صعودی عقدہ۔  
چھوٹے مثلث ن ت قہ میں مس ن ت = جب (ع - ۲ ت) مس خ  
اور مثلث ن ت قہ میں مس ن ت = جب (ع - ۲ ت) مس خ  
اس لیے جب ۲ ت = مس خ جب (ع - ۲ ت) مم سے  
اور اس لیے ۲ ت = خ مم سے جب ع تقریباً  
اس لیے سہارہ کا طول بلد بالعموم ۹۰ + خ مم سے جب ع ہے۔



شکل (۳۷)

مثال ۲۵ - ثابت کرو کہ قلب اسد اور پیاند کے درمیان اصلی فاصلہ بوقت  
بجے شام گریز چاند وسط وقت بتاریخ ۶ جنوری ۱۹۶۱ء ۲۱ ۵۹ ۳۱ ہے۔ یہ دیا گیا ہے کہ

میل				مستقیم			
ش	۲۰	۱۵	۲۴	۵۶	۱۲	۹	چاند
ش	۲۵	۲۴	۱۲	۳۱	۶	۱۰	ستارہ



مثال ۲۶ - ثابت کرو کہ ایک ستارہ کے لیے جو مشرق کے شمال کی طرف طلوع ہوتا ہے جس شہر سے السمیت بدلتا ہے وہ شہر دہی رہتی ہے جبکہ وہ طلوع ہوتا ہے اور جبکہ وہ مشرق سے سمیت بدلتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ یہ شہر اقل ہوتی ہے جبکہ السمیت مشرق کے شمال کی طرف

جب (مسئلہ جب ۲۶ جم ۷۷)

ہو جہاں ستارہ کا عرض بلد اور ارتفاع ۷۷ ہے جبکہ وہ مشرقی سمت میں ہوتا ہے۔

[Math. Trip. 1902]

مثال ۲۷ - ثابت کرو کہ کسی معلوم گریجویٹ وقت پر دو معلوم ستاروں کے ارتفاعوں کے مشاہدات مشاہد کا طول بلد اور عرض بلد معلوم کرنے کے لیے کافی ہیں۔ بتاؤ کہ کس طرح ترسیبی طریقہ سے ان مشاہدات کی بنا پر مشاہد کا محل کرہ زمین پر معلوم کیا جاسکتا ہے۔

اگر مشاہدے کے لیے نتیجہ ستارے نصف النہار کی مخالف سمتوں میں ہوں تو ثابت کرو کہ ہر ستارہ کے مشاہدہ کردہ ارتفاع میں جھوٹی خطا صہ کی وجہ سے عرض بلد اور طول بلد میں خطا میں ملتی ترتیب حسب ذیل ہوں گی:-

صہ قط (ع + ع) جم (ع - ع) اور صہ قط فہ قط (ع + ع) جب (ع - ع) ع

جہاں فہ موصو یہ عرض بلد ہے اور ۲ ع ۲ ع ستاروں کے السمیت ہیں۔



# چھٹا باب

## کرہ ہوائی کا انعطاف

(۱۱۶)

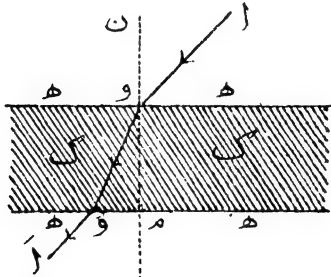
صفحہ	دفعہ
۱۷۷	۳۹ — مناظری انعطاف کے قوانین
۱۸۱	۴۰ — ہیئتہی انعطاف
۱۸۳	۴۱ — ہوائی انعطاف کا عام نظریہ
۱۸۶	۴۲ — انعطاف کی محصلہ تفرقی مساوات کا مکمل
۱۹۰	۴۳ — کرہ ہوائی کے انعطاف کے لیے کیسینی کا ضابطہ
۱۹۴	۴۴ — کرہ ہوائی کے انعطاف کے لیے دیگر ضابطے
۱۹۸	۴۵ — کرہ ہوائی کے دباؤ اور تپش کا اثر انعطاف پر
۱۹۹	۴۶ — مشاہدہ سے کرہ ہوائی کے انعطاف کی تعیین
۲۰۳	۴۷ — انعطاف کا اثر ساعتی تراوے اور میل پر
	۴۸ — انعطاف کا اثر دو قریبی سماوی نقطوں کے درمیان ظاہری
۲۰۵	فاصلہ پر
۲۱۰	۴۹ — انعطاف کا اثر ایک دو ہرے تارے کے زاویہ محل کی پیمائش
	۳۹ — مناظری انعطاف کے قوانین۔
	اگر روشنی کی شعاع (۱) (شکل ۳۸) ایک شفاف تجانس واسطہ ۵۵ میں سے

حرکت کرتی ہوئی و پڑا کر ایک دوسرے متجانس واسطہ گ گ میں داخل ہو تو اس شعاع کی سمت میں اپنا تک تبدیلی واقع ہوتی ہے اور شعاع اس نئے واسطہ سمت و و میں حرکت کرتی ہوئی عبور کرتی ہے۔ یہ تبدیلی انعطاف کے طور پر مشہور ہے۔ شعاع ۱ و کو وقوع شعاع اور شعاع و و کو منعطف شعاع کہتے ہیں۔ وقوع شعاع اور منعطف شعاع دونوں ایک ہی مستوی میں واقع ہوتی ہیں اور یہ مستوی واسطوں کی سطح فاصل کے نقطہ و پر کے عماد میں سے گذرتا ہے فرض کرو کہ ان دو واسطوں کی سطح فاصل کے نقطہ و پر عماد و و ن ہے تو زاویہ ن و ۱ = سا کو وقوع کا زاویہ کہتے ہیں اور و و = فہ کو انعطاف کا زاویہ کہتے ہیں۔ انعطاف کا بنیادی کلیہ ضابطہ

جب سا = مہ جب فہ

سے بیان ہوتا ہے جہاں مہ ایک خاص مستقل ہے جو ان دو واسطوں کی نوعیت پر منحصر ہوتا ہے جن میں سے شعاع گذرتی ہے۔ اگر وقوع شعاع کی سمت میں کسی تبدیلی کے باعث زاویہ سایدل جائے تو اس کے ساتھ زاویہ فہ کو بھی اس طرح بدلنا چاہیے کہ ان دو زاویوں کی جیوب کی نسبت وہی رہے۔ مہ کو پہلے واسطہ سے دوسرے واسطہ میں جانے کا انعطاف کہا جاتا ہے۔

(۱۱۷)

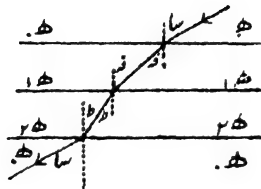


شکل (۳۸)

اس امر کو خوب ذہن نشین کر لینا چاہئے کہ مہ حسب صراحت بالا  
 ان دو واسطوں کی نوعیت پر منحصر ہوتا ہے جن میں سے شعاع گزرتی  
 ہے اور نیز نور کی نوعیت پر بھی منحصر ہوتا ہے۔ مثلاً نیلے رنگ کی  
 روشنی کی شعاع کے لیے مہ مختلف ہوگا اور سرخ رنگ کی روشنی کی شعاع  
 کے لیے مختلف اگرچہ واسطے دونوں صورتوں میں وہی ہوں۔ ہمیں صرف  
 کرہ ہوائی کے انعطاف پر غور کرنا ہے اور اس صورت میں انتشار (حیساں کہ  
 یہ ظہر کہلاتا ہے) استقدر بڑا نہیں ہوتا کہ علمی علم ہیئت کے مقاصد کے لیے  
 اس پر توجہ کرنا ضروری ہو جائے۔ اس لیے ہم مہ کی ایک اوسط قیمت  
 لیتے ہیں جو کافی طور پر صحیح ہوگی اگرچہ کہ نور کی وہ شعاعیں جن سے ہم واسطہ  
 رہے گا ترکیبی نوعیت کی ہوں۔ زمین کی سطح پر کرہ ہوائی کا انعطاف ظاہر  
 : مئی تپش اور ۷۶۰ محمد باقر ۲۹۴۰۰۰۰ الیہ جاتا ہے۔

اگر شعاع کی سمت الٹ دی جائے یعنی اگر شعاع سے ابتدا کر کے  
 واسطہ گگ میں سے ہوتی ہوئی و تک جائے اور وہاں سے واسطہ  
 ھ ھ میں داخل ہو تو شعاع واسطہ ھ ھ کو ٹھیک اسی راستہ و ا پر  
 سے گذرتی ہوئی عبور کرے گی۔ یہ اس عام خاصیت کی سبب ایک  
 نصوص صورت ہے کہ وہ معنی یا شکستہ خط جس کو کوئی کرن مختلف واسطوں  
 میں سے انعطافوں کے ایک سلسلہ کے زیر اثر اور کسی وقوعوں پر  
 اختیار کرتی ہے اس وقت بھی اختیار کرے گی جبکہ نور کی اشاعت کی  
 سمت الٹ دی جائے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر گگ کی غلی سطح اوپر  
 کی سطح کے متوازی ہو تو شعاع واسطہ ھ ھ کی ایک دوسری تہ کے  
 اندر و ا پر داخل ہو کر سمت و ا اختیار کرے گی جو وقوع کی سمت و ا و  
 کے متوازی ہوگی۔ پس ہمیں معلوم ہوا کہ نور کی شعاع جب متوازی رتوں  
 والی ایک متجانس تختی میں سے گذرتی ہے تو تختی سے باہر نکل کر پھر اپنی  
 سمت اختیار کر لیتی ہے اگرچہ کہ وہ بلاشبہ ذرا بازو ہٹ جائے گی۔ ہمیں

چونکہ صرف شعاعوں کی سمتوں سے واسطہ ہے اس لیے اس کا بازو ہمٹ جانا قابل توجہ نہیں ہے۔  
فرض کرو کہ شعاع واسطہ  $ھ$  سے  $ھ$  میں جاتی ہے تو انعطاف نما  $م$  ہے شکل (۳۹) اور  $ھ$  سے  $ھ$  میں جاتی ہے تو انعطاف نما  $م$  ہے۔ یہ معلوم کرنا مقصود ہے کہ شعاع واسطہ  $ھ$  سے  $ھ$  میں جائے تو انعطاف نما کیا ہوگا۔



شکل (۳۹)

شعاع  $ھ$  سے  $ھ$  اور  $ھ$  کی متوازی تختیوں میں سے ہوتی ہوئی  $ھ$  پر اپنی اصلی سمت کے متوازی سمت میں خارج ہوتی ہے، اور اگر وقوع کے متوازی زاویے سا، فہ، طہ ہوں تو پہلے وقوع اور آخری خروج سے حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں:-

$$\text{جب سا} = \text{م} \text{ جب فہ اور جب سا} = \text{م} \text{ جب طہ}$$

$$\text{اس لیے} \quad \text{م} \text{ جب فہ} = \text{م} \text{ جب طہ}$$

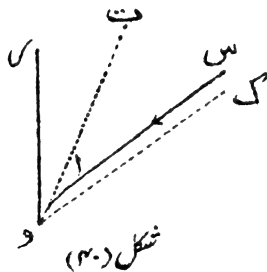
اس طرح حسب ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے:-

اگر ایک معیاری واسطہ سے دوسرے واسطہ میں جانے کا انعطاف نما  $م$  ہو اور معیاری واسطہ سے ایک اور واسطہ  $ھ$  میں جانے کا انعطاف نما  $م$  ہو اور اگر  $ھ$  سے  $ھ$  میں راست گزرنے والی ایک شعاع کا وقوع کا

زاویہ فہ ہو اور زاویہ انعطاف طہ ہو تو مہ جب فہ = مہ جب طہ اور  
 ھہ سے ھہ میں راست گزرنے والی ایک شعاع کے لیے انعطاف نما  
 مہ ہے۔

## ۴۰۔ ہیئت انعطاف۔

کسی جرم فلکی سے نور کی شعاعیں جب بیرونی فضاء سے ہوتی ہوئی زمین کے کرہ ہوائی  
 میں سے گذرتی ہیں تو وہ ہیئت انعطاف (Astronomical refraction)  
 سے متاثر ہوتی ہیں۔ کرہ ہوائی کے اوپر کے طبقات میں ہوا کی کثافت اس قدر کم ہوتی  
 ہے کہ مجموعی انعطاف میں ان کی وجہ سے بہت کم اضافہ ہوتا ہے۔ وہ انعطاف  
 جس سے ہیئت دال کو خاص طور پر واسطہ رہتا ہے زمین کی سطح کے اوپر صرف  
 چند ذیل کے اندر وقوع پذیر ہوتا ہے۔ انعطاف کی باعث کسی ستارہ سے  
 نکلی ہوئی نور کی شعاع کرہ ہوائی میں سے ایک خط مستقیم میں نہیں گذرتی۔  
 یہ ایک منحنی پر چلتی ہے اور اس لیے جب اس کی شعاعیں مشاہدہ تک  
 پہنچتی ہیں تو ستارہ اُسے ایسی سمت میں دکھائی دیتا ہے جو اُس کی اصلی  
 سمت نہیں ہوتی۔



دور کے کسی ستارے سے ہماری جانب سمت میں (شکل ۴۰)  
 میں آنے والی نور کی شعاع سیدھی راہ پر چلتی ہے یہاں تک کہ وہ

۱۔ پر مشورہ کردہ ہوائی میں داخل ہو اور پھر یہاں سے اس کی راہ سیدھی نہیں رہتی۔ (۱) سے مشاہدہ کے مقام و تک یہ شعاع کردہ ہوائی کی ایسی تھوں میں سے گذرتی ہے جن کی کثافت مسلسل بڑھتی ہے اور اس لیے شعاع مقام و تک پہنچنے میں زیادہ اور زیادہ ترنخی ہوتی جاتی ہے۔ مشاہدہ کو معلوم ہوتا ہے کہ شعاعیں وقت سے آ رہی ہیں جہاں وقت و پر نخی کا ماس ہے۔ اگر وہ میں خط و تک (۱) سے متوازی ٹھینچا جائے تو اس خط سے وہ سمت معلوم ہوگی جس میں ستارہ نظر آتا اگر کوئی انعطافی نخل واقع نہ ہوتا۔ پس کسی جرم سماوی پر انعطاف کا اثر یہ ہوتا ہے کہ اس کا ظاہری مقام بقدر زاویہ وقت و تک کے مشاہدہ کے راس کی جانب اوپر حرکت کرتا ہے۔ انعطاف بڑے سے بڑا فرق پر ہوتا ہے جہاں اس کی باعث اجرام فلکی تقریباً ۵۴۰ اوپر اٹھے ہوئے نظر آتے ہیں۔

پس کسی جرم فلکی کے مشاہدہ کردہ محدودوں میں بالعموم تصحیحات عمل میں لانی ہوں گی تاکہ ان تصحیحات کے بعد یہ معلوم ہو جائے کہ محدود کیا ہیں جبکہ انعطاف نہ ہو۔ اس لیے انعطاف کے اثرات کی تحقیق عملی علم ہیئت کا ایک اہم جزو ہے۔

ایک تقریبی جدول یہاں دی جاتی ہے جس سے یہ معلوم ہوگا کہ انعطاف ستاروں کے راسی فاصلوں کو کتنا گھٹاتا ہے۔ یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ باریچا کا ارتفاع ۳۰ انچ ہے اور تپش ۵۰ فائن ہاٹ ہے۔ دیکھو نیو کومب کی اسفریکل اسٹرانومی صفحہ ۴۳۳۔

خاہری اسی فاصلہ	انعطاف	خاہری اسی فاصلہ	انعطاف	خاہری اسی فاصلہ	انعطاف
۰	۰	۳۵	۴۱	۲۰	۳۹
۵	۵	۴۰	۴۹	۲۵	۳۴
۱۰	۱۰	۳۵	۵۸	۳۰	۲۹
۱۵	۱۵	۵۰	۹	۳۵	۲۵
۲۰	۲۰	۵۵	۲۳	۴۰	۲۳
۲۵	۲۵	۶۰	۴۱	۴۵	۲۲
۳۰	۳۰	۶۵	۴۲		

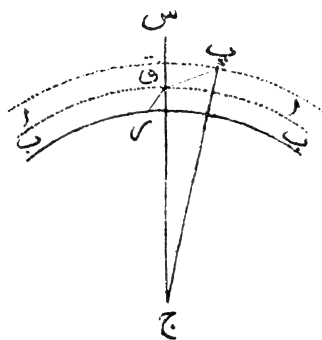
مثلاً ۵۰ کے راسی فاصلہ پر ہم دیکھتے ہیں کہ انعطاف ۹° ہے اور اسلئے صحیح راسی فاصلہ ۵۰ آ ۹° ہے۔ یہ امر مشاہدہ طلب ہے کہ کسی راسی فاصلہ کے لیے جو ۴۵ سے کم ہو انعطاف آ کے برابر بھی نہیں ہے اور ۲۰ تک کے راسی فاصلوں کے لیے انعطاف عملاً آنی درجہ ہے۔

### ۴۔ ہوائی انعطاف کا عام نظریہ۔

ہم فرض کریں گے کہ زمین کرؤی ہے اور کرؤہ ہوائی پتلی تہوں کے ایک سلسلہ سے ترکیب یافتہ ہے جو زمین کے ہم مرکز کرؤوں سے محدود ہیں۔ ہوا کا انعطاف نما ہر تہہ کے پورے جثہ میں مستقل ہونا چاہئے لیکن ایک تہہ سے دوسری تہہ میں وہ متغیر ہو سکتا ہے۔

ایسی دو تہوں ۱ اور ۲ (شکل ۴) پر غور کرو۔ آزاد شیر کے لحاظ سے بیرونی تہہ ۱ کا انعطاف نما مہ اور تہہ ۲ کا انعطاف نما مہ ہے۔ ایک شعاع جو ۱ میں سے سمت پ ق میں گزرتی ہوئی ۲ کے اندر داخل ہوتی ہے تو وہ سمت ق ر میں مڑ جاتی ہے فرض کرو کہ زمین کا مرکز ج ہے اور





نقل (۴۱)

سا = س ق پ فم = ح ق پ ج فم = ح ر ق ج  
 ج پ = ر ج ق = ر  
 اب چونکہ ج ق سطح فاصل پر عمود ہے اس لیے انعطاف کے اصولوں  
 (دفعہ ۳۹) کی رو سے

م ج جب سا = م ج جب فم

لیکن مثلث پ ج ق سے

جب سا : جب فم = ر : م

پس سا کو سا فظ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ر م ج جب فم = ر م ج جب فم

یہ کسی دو متصل تہوں کے لیے درست ہوگا اور اس لیے ہمیں حسب ذیل

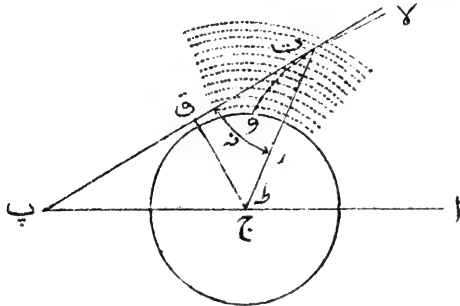
عام مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔  
 فرض کر دو کہ کرہ ہوائی پتلی کر دی تجانس تہوں کی ایک تعداد سے ترکیب

یافتہ سمجھا گیا ہے اور یہ تہیں زمین کے ہم مرکز ہیں اور ایک تہہ سے دوسری تہہ میں کثافت متغیر ہوتی ہے۔ جب کوئی شعاع متواتر تہوں کو عبور کرتی ہے تو انعطاف کے زاویہ کی جیب، تہہ کا نصف قطر اور اس کا انعطاف ان تینوں کا حاصل ضرب مستقل رہتا ہے۔

ہم اس مسئلہ کو حسب ذیل ضابطہ کی شکل میں بیان کر سکتے ہیں:-

رہ جیب فہ = ر مہ جیب ی ..... (۱)

جہاں ظاہری ر اسی فاصلہ ی ہے، زمین کا نصف قطر ر ہے اور سب سے پچلی تہہ کا انعطاف ر مہ ہے۔



شکل (۴۲)

اگر ہم یہ فرض کریں کہ تہیں لانا انتہائی پتلی ہیں تو شعاع کا راستہ ایک شکستہ خط ہونے کی بجائے ایک منحنی ہوگا۔ فرض کرو کہ یہ منحنی لات و (شکل ۴۲)

ہے جبکہ شعاع ان متواتر تہوں میں سے گذرتی ہے اور زمین پر وپر پہنچتی ہے۔ (۱۲۲)

اس منحنی کے نقطہ ت پر ماس ت ق پ کھینچو جہاں ت وہ نقطہ ہے جس پر ایک شعاع ایک تہہ میں داخل ہوتی ہے جس کا انعطاف ر مہ ہے اور نصف قطر ر۔ یہ ماس شعاع کے ایک چھوٹے جزو کے ساتھ منطبق ہوتا ہے اور اس لیے زاویہ ج ت ق = فہ یعنی انعطاف کا زاویہ۔ جب شعاع کرہ ہوائی کے طبقات میں اول داخل ہوتی ہے تو

منحنی کا ماس ستارے کی اصلی سمت پر منطبق ہونا چاہئے۔ برخلاف اس کے جو پر اس منحنی کا ماس وہ سمت ظاہر کرتا ہے جس میں شعاع مشاہد کی آنکھ میں داخل ہوتی ہے۔ ان دو ماسوں کا درمیانی زاویہ شعاع کی سمت میں مجموعی تبدیلی کا اظہار کرتا ہے۔ یہ وہ مقدار ہے جس کی تعیین ہم کرنا چاہتے ہیں کیونکہ اسی کو ہم بالعموم انعطاف کہتے ہیں۔

اگر یہ انعطاف غہ ہو تو دو متصل ماسوں کا درمیانی زاویہ فرغہ ہے جو = فرطہ - فرغہ اگر طہ =  $\angle$  ج د اور فہ =  $\angle$  ج ت پ علم ہندسہ کی رو سے ہم دیکھتے ہیں کہ فرطہ = مس فہ فرار، اس لیے فرغہ = مس فہ فرار - فرطہ

اب ہم اس مساوات کو مساوات (۱) کے ذریعہ مستحیل کر سکتے ہیں۔ مساوات (۱) لکھی جاسکتی ہے  
لوک ر + لوک مہ + لوک جب فہ = مستقل  
اسے تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرار} + \text{فرمہ} - \text{مہ} + \text{مہ فہ فرغہ} = \dots\dots\dots (۲)$$

اس لیے فرغہ = مس فہ فرمہ - مہ ..... (۳)  
(۱) کی مدد سے مس فہ کو ساقط کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرغہ} = \frac{1}{\text{مہ جب ی}} \text{ فرمہ}$$

اس طرح ہمیں انعطاف کے لیے تفرقی مساوات مل جاتی ہے۔

## ۴۲۔ انعطاف کی محصلہ تفرقی مساوات کا تکمل۔

انعطاف کو صحیح طور پر معلوم کرنے کے لیے اس مساوات کو محدود مہ = مہ اور مہ = ۱ کے درمیان تکمل کرنا ہوگا جہاں مہ = ۱ وہ قیمت ہے جو

کرہ ہوائی کی اوپر کی تہ پر مہ کی ہے۔ اس منزل پر انعطاف کے نظر میں جو شکل ہے وہ خود پیش میں ہوتی ہے۔ وہ جلد جسے مکمل کرنا ہے (۱۲۲) وہ متغیر اور مہ رکھتا ہے جن میں تعلق پیدا کرنا ضروری ہے۔ اگر اس تعلق کا قانون معلوم ہوتا تو ہم رقوم مہ کی رقوم میں بیان کر سکتے اور اس طرح مسئلہ صرف یہ رہ جاتا کہ مہ کے کسی خاص تفاعل کا تکمل کیا جائے۔ لیکن ہمیں اس قانون کے متعلق ٹھیک معلومات حاصل نہیں ہیں جس کی بموجب انعطاف نما زمین کی سطح کے اوپر ارتفاع کے ساتھ متغیر ہوتا ہے۔ تاہم یہ معلوم کرنا دلچسپی سے خالی نہیں کہ اس مسئلہ کا ایک تقریبی حل حاصل کرنا ممکن ہے جو اکثر و بیشتر مقاصد کے لیے اس قانون کے علم کے بغیر بالکل کافی ہے جس کے بموجب کرہ ہوائی کی کثافت، زمین کی سطح کے اوپر ارتفاع کے ساتھ بدلتی ہے۔

ہم مان لیتے ہیں کہ  $h = a + s$  جہاں  $s$  ایک چھوٹی مقدار ہے کیونکہ کرہ ہوائی کے بلند ترین حصہ کا ارتفاع بھی بمقابلہ زمین کے نصف قطر کے چھوٹا ہے۔ ہم  $h$  کی بجائے  $a$  اس کی قیمت فرقہ کے جملہ میں درج کریں گے اور  $s$  کی ایک سے اعلیٰ ترقوتوں کو نظر انداز کریں گے۔ اس طرح

$$\frac{\text{مہ جب ی فرمہ}}{\text{مہ (مہ - مہ جب ی + ۲ مہ)}} = \frac{\text{مہ جب ی فرمہ}}{\text{مہ (مہ - مہ جب ی + ۱)}} \cdot \frac{1}{2}$$

لہٰذا اس مساوات کے تکمل کی عام بحث اس قدر قوی ہے کہ اس کا اندراج یہاں نامناسب ہے۔ اس کا مطالعہ پروفیسر نیو کو مپ کی (Comp. of sph. Astro.) اور پروفیسر کیمبل کی (Practical Astro.) میں کیا جاسکتا ہے۔ یہ مسئلہ کی دقیق اور جامع تحقیقات کا ذکر برنولڈ کی (Sph. Astro.) میں ملے گا۔ میں پروفیسر ای۔ ٹی۔ ویلیکس کا ممنون ہوں کہ انہوں نے اس نفیس تقریبی طریقہ کی طرف میری توجہ منعطف کی جو یہاں درج ہے۔

$$= \frac{\text{مب جبب ی فرمہ}}{\text{مب جبب ی}} - \frac{\text{مب جبب ی فرمہ}}{\text{مب جبب ی}} \quad \text{س مہ مب جبب ی فرمہ}$$

پس انعطاف دو ٹکڑوں سے بیان ہوتا ہے جن میں سے پہلا جو اہم ترین حصہ ہے یہ ظاہر کرتا ہے کہ انعطاف کیا ہو گا اگر س = ۰ یعنی اگر زمین کی سطح مستوی ہوتی۔ یہ صریحاً ایک مشہور ابتدائی تکملہ ہے اور اس کی قیمت ہے

جبب (مب جبب ی) - ی  
اگر ہم چھوٹی مقدار (مب - ۱) کو لا سے تعبیر کریں تو یہ تکملہ لکھا جاسکتا ہے

جبب (۱ + لا) جبب ی { - ی  
اور اگر اسے بیگلارن کے مسئلہ سے لا کی قوتوں میں پھیلا یا جائے تو اس کو محسوب کرنے میں آسانی ہوگی اگر ہم لا کی دو سے اعلیٰ تر قوتوں کو نظر انداز کریں ہم دیکھتے ہیں کہ پہلے تکملہ کی تقریبی قیمت

(مب - ۱) مس ی + ۱ (مب - ۱) مس ۲ ی ہے۔  
دوسرے تکملہ کی قیمت معلوم کرنے میں ہم دیکھتے ہیں کہ س، متکمل

میں ایک جزو ضربی کے طور پر شریک ہوتا ہے اور اس لیے مہ = مب = ۱ رکھنے سے کوئی قابل قدر خطا وقوع پذیر نہ ہوگی کیونکہ رتبہ س (مب - ۱) کی مقدار میں اس قدر چھوٹی ہیں کہ نظر انداز ہو سکتی ہیں۔ پس دوسرا تکملہ ذیل کی سادہ شکل اختیار کرتا ہے

(۱۲۴)

$$- \frac{\text{جبب ی}}{\text{جبب ی}} \text{ س فرمہ}$$

فرض کرو کہ کرہ ہوائی کے اُس خول کی کثافت ث ہے جس کا انعطاف ثا مہ ہے۔ تب گلاڈسٹون اور ڈیل کے کلیہ کی رو سے مہ اور ث شکل

مہ - ۱ = م ث  
کی ایک مساوات سے مربوط ہوں گے جہاں م ایک مستقل مقدار ہے۔ اس لیے  
فرمہ = م × فرث

اگر زمین کی سطح پر ہوا کی کثافت  $\theta$  ہو تو یہ تکملہ

$$-m \frac{جیب ی}{جیب ی} \frac{س}{س} فرس$$

ہو جاتا ہے تکمیل بالخص سے یہ تکملہ

$$-m \frac{جیب ی}{جیب ی} \frac{س}{س} فرس$$

ہو جاتا ہے کیونکہ وہ قہیں جو تکملہ کے مشاثر نہیں ہوتیں معدوم ہوتی ہیں۔ نیز ہم رکھتے ہیں  $s = s$  جبکہ  $\theta = \theta$  اور  $s = s$  جبکہ  $\theta = \theta$ ۔ اس جملہ کا تکملہ ایک قابل یادداشت اہمیت رکھتا ہے کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ اس سے ہوا کی وہ کل کمیت تعبیر ہوتی ہے جو سطح زمین کے ایک اکائی رقبہ کے اوپر انقباضاً واقع ہے اور اس لیے کرہ ہوائی کے دباؤ کے متناسب ہے یعنی بار پیمائے ارتفاع کے متناسب۔ اس لیے اس اصلی قانون کی جس کی بموجب کرہ ہوائی کی کثافت ارتفاع کے ساتھ متغیر ہوتی ہے اب اس سوال میں ضرورت نہیں رہتی۔

اس طرح انعطاف کے نظری جملہ نے ایک بہت ہی سادہ شکل اختیار کر لی۔ یہ دو تکملوں کے درمیان فرق ہے جن میں سے پہلا معلوم کیا جا چکا ہے اور دوسرا

$$مس ی + مس ی$$

کے متناسب ہونا چاہئے۔ اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ کل انعطاف شکل  $مس ی + مس ی$  کا ہونا چاہئے جہاں  $ی$  ظاہری راسی فاصلہ ہے اور  $ا$  ب مستقل مقداریں ہیں۔ ان مستقلوں کی قیمتیں مشاہدے سے متعین کرنی ہوں گی جیسا کہ دفعہ ۴۶ میں ظاہر کیا جا چکا ہے۔

اور مہ کے درمیان تعلق کی نسبت ہم مختلف مفروضات بھی

مان سکتے ہیں اور ان کی بموجب محسوسہ نیچوں کا مقابلہ ان نیچوں کے ساتھ کر سکتے ہیں جو راست مشاہدے سے حاصل ہوئے ہوں۔ یہ امر قابل غور ہے کہ اگر وہ کے درمیان متعدد مختلف رشتے ایسے ہیں کہ ہر ایک سے انعطاف کا ایک نظریہ ملتا ہے اور اس کی بموجب محسوسہ نتیجے مشاہدے سے حاصل کئے ہوئے نیچوں کے ساتھ کافی طور پر مطابق ہوتے ہیں۔

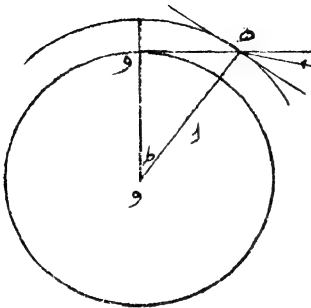
### ۴۳۔ کرہ ہوائی کے انعطاف کے لیے کیسینی کا ضابطہ

کیسینی کے مفروضہ سے جس میں کرہ ہوائی کو تناسل فرض کیا جاتا ہے انعطاف کے لیے ایک جہ حاصل کیا جاسکتا ہے جو عملاً اس جملہ کے مائل ہے جو ابھی ہم نے معلوم کیا ہے۔ بلاشبہ یہ مفروضہ غیر صحیح ہے لیکن یہ یاد رکھنا چاہئے کہ اگر زمین کی سطح تختی ہونے کی بجائے مستوی ہوتی تو کرہ ہوائی کی متوازی تہیں متوازی ریش والی ہوتیں اور اس لیے سب سے پہلی تہ کے انعطاف نام سے ہی کل انعطاف کی تعیین ہو جاتی (صفحہ ۳۶)۔ پس صرف زمین کا انحناء ہی ہے جو کیسینی کے نظریہ سے حاصل ہونے والے ضابطہ کو باطل درست ہونے میں حارج ہے۔

یہ یاد کر کے نہ کے عمدہ وجود موجود ہیں کہ بیس میل کے ارتفاع پر کرہ ہوائی کی کثافت زمین کی سطح پر اس کی کثافت کے تیسویں حصہ سے بھی کم ہے۔ اس لیے ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ تقریباً سارا انعطاف زمین کی سطح کے اوپر بیس میل کے اندر پیدا ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مشاہدہ کا مقام و (شکل ۴۳) ہے اور وہ ایک شعاع ہے جو پوائنٹ سمت میں پہنچتی ہے ایسی کسی شعاع پر بلاشبہ کسی دوسری شعاع کی بہ نسبت انعطاف کا زیادہ اثر ہوگا۔

فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر  $R$  ہے اور کرہ ہوائی کے اس خول کا نصف قطر  $r$  ہے جس پر شعاع نقطہ  $v$  پر آکر پڑتی ہے۔



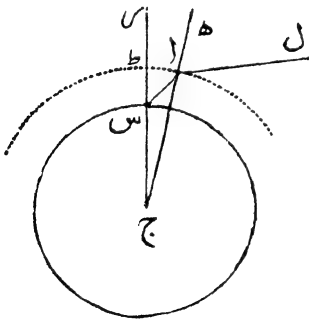
شکل (۲۳)

اگر و اور ہ پر خولوں کے  
ماسوں کا درمیانی زاویہ  
طہ ہو اور اگر ہ و کو ایک  
خط مستقیم تسلیم کیا جائے تو  
جب طہ = ۱ - ۱ (۱ + ل)

$$۱۰۰ \div ۱۰۰ = ۱ \div ۱ = ۱۰۰ \div ۱ = ۱۰۰$$

اس لیے طہ تقریباً ۹۰ ہے۔  
اس طرح مختلف کثافتوں

کی ہوائی موثر تہیں جن میں سے شعاعوں کو گذرنا ہوگا اس قدر تقریباً متوازی  
ہیں کہ ان میں سے کسی کو بھی ٹھیک طور پر متوازی بنانے کے لیے ۹۰ سے  
بڑے زاویہ میں سے گھمانا نہ پڑے گا۔ اس لیے ہم حقیقت سے زیادہ  
دور نہ ہوں گے اگر یہ مان لیں کہ کرہ ہوائی افقی تہوں پر مشتمل ہے۔ ایسی  
صورت میں کرہ ہوائی کے غیر متجانس ہونے سے کل انعطاف پر کوئی اثر  
نہیں پڑتا۔



شکل (۲۴)

ر اسی فاصلہ کو انعطاف کے  
ساتھ مربوط کرنے والا ضابطہ مفروضہ  
متجانس کرہ ہوائی کی صورت میں  
کیسینی نے حاصل کیا ہے جو حسب  
ذیل ہے۔

ہم مان لینگے کہ کرہ ہوائی کو  
اس فضاء میں کشف کر دیا گیا ہے  
جو نصف قطر ج س اور ج ط  
کے دو کردی خولوں کے درمیان ہے۔



کرہ ہوائی کی کثافت کو یکساں اور اس کے انعطاف نما کو مہ فرض کیا جاتا ہے۔

شعاع  $ل$  ' کرہ ہوائی کی سطح کے نقطہ  $ا$  پر پڑتی ہے جس پر اس سطح کا عماد  $ج$   $اھ$  ہے اور یہ شعاع زمین کی سطح کے نقطہ  $س$  پر مشاہد تک پہنچتی ہے، پس زاویہ  $ل$   $اھ = سا$  وقوع کا زاویہ ہے اور زاویہ  $س$   $ا ج =$  فہ انعطاف کا زاویہ ہے۔

شعاع سمت  $ا$   $س$  میں مشاہد تک پہنچتی ہے اور اس لیے زاویہ  $ا$   $س ط =$  ی جرم کا ظاہری راستی فاصلہ ہے۔ اگر حسب سابق  $ا$  سے زمین کا نصف قطر تعبیر ہو اور کرہ ہوائی  $س ط$  کی موٹائی  $ل$  سے ظاہر کی جائے تو مثلث  $س ج ا$  سے

$$(ا + ل \setminus ل) \text{ جب فہ } = \text{ جب ی}$$

$$\text{اور نیز جب سا} = \text{مہ جب فہ}$$

$$\text{اس لیے جب سا} = \text{مہ} (ا - ل \setminus ل) \text{ جب ی، بڑی حد تک}$$

کیونکہ  $ل$  ایک چھوٹی مقدار ہے جو  $\frac{1}{111}$  سے کم محسوب ہوئی ہے۔

اگر کل انعطاف غہ ہو یعنی موقوفہ شعاع اپنی اصلی سمت سے بقدر زاویہ غہ کے مڑ چکی ہو تو سا = فہ + غہ اور یہ فرض کر کے کہ غہ کو قوس کے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{غہ جب ا} = (\text{جب سا} - \text{جب فہ}) \text{ قسط فہ}$$

اب جب سا، جب فہ، جم فہ کی بجائے علی الترتیب حملے

$$\text{مہ} (ا - ل \setminus ل) \text{ جب ی،} (ا - ل \setminus ل) \text{ جب ی،} (ا - ل \setminus ل) \text{ جب ی}$$

درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{غہ} = (ا - مہ) \text{ قسط ا} \quad (ا - ل \setminus ل) \text{ جب ی}$$

$$\{ (ا - ل \setminus ل) \text{ جب ی} \} \frac{1}{111}$$

$$\begin{aligned} &= (م - ۱) ق م \{ مس ی - (مس ی + مس ی) ل \} \{ ۱ \} \\ &= \{ مس ی + ب مس ی \dots \dots (۱) \} \\ &\{ = (م - ۱) (۱ - ل) ق م \{ ۱ \} \} \quad \text{جہاں} \\ &ب = - (م - ۱) ل \{ ۱ \} ق م \{ ۱ \} \end{aligned}$$

یہ ضابطہ جو اس دفعہ اور پچھلے دفعہ کے مختلف اعمال سے حاصل کیا گیا ہے علمی طور پر قابل استعمال نہیں گا اگر ہم ۱ اور ب کی عددی قیمتیں حاصل کر لیں۔ یہ عددی قیمتیں کم از کم دو مخصوص صورتوں میں (دیکھو دفعہ ۴۶) انعطاف کا راست مشاہدہ کر کے حاصل کی جاتی ہیں چنانچہ ہم یہ مان لیں گے کہ اس طرح ہمیں یہ معلوم ہوا ہے کہ تیش ۵۰ فارن ہائیٹ اور دباؤ ۳۰ انچ پر انعطاف، ظاہری راسی فاصلوں ۵۴ اور ۵۶ پر علی الترتیب ۸۰.۶ اور ۲۰۰.۴ ہیں۔

اس طرح ضابطہ (۱) سے ۱ اور ب معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل دو مساواتیں ملیں گی

$$\begin{aligned} ۸۰.۶ &= ۱ (مس ۵۴) + ب (مس ۵۴) \\ ۲۰۰.۴ &= ۱ (مس ۵۴) + ب (مس ۵۴) \end{aligned}$$

ان مساواتوں کو حل کرنے سے اوسط دباؤ ۳۰ انچ اور تیش ۵۰ ف پر انعطاف کے لیے حسب ذیل عام جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} &ع = ۵۸۶۲۹۴ مس ی - ۶۶۸۶۶ مس ی \dots \dots (۲) \\ &\text{اس طرح } ب \{ ۱ \} \text{ صرف } ۸۴۳۱ \text{ ہے اور اس لیے ہم دوسری رقم کو} \\ &\text{نظر انداز کر سکتے ہیں سوائے اس صورت کے جبکہ مس ی بہت بڑا ہو} \\ &\text{یعنے جبکہ جرم افق کے قریب ہو۔} \end{aligned}$$

اگر راسی فاصلہ ۵۰ سے تجاوز نہ ہو تو اکثر مقاصد کے لیے جبکہ انتہائی تیشیں شامل نہ ہوں انعطاف کو کافی صحت کے ساتھ اس سادہ جملہ

ک مس ی

سے محسوس کیا جاسکتا ہے۔ یہاں صرف پہلی رقم استعمال کی گئی ہے اور دوسری رقم جس میں سسٹائی شامل ہے نظر انداز کر دی گئی ہے اس لیے کہ کو ۵۸۶۲۹۴۷ لینے کی بجائے ۵۸۶۲ لینا قدر زیادہ صحیح ہے۔ اس مقدار کو انعطاف کا سرکہتے ہیں۔

مثال ۱۔۔۔ تہانہ س کرہ ہوائی کی موٹائی کیا ہونی چاہئے کہ جس سے انعطاف کے لیے ایسا جملہ ملے جو مشاہدے کے مطابق ہو۔

- ب = ج = د

اس لیے  $583 \mid 1 = 583 \mid 0.666 = 1 \mid 1$  (۱۲۸)

اس لیے  $1 = 39.54$  میل لینے سے  $l = 2.5$  میل -

مثال ۲۔ بتاؤ کہ دباؤ ۳۰ انچ اور تیش ۵۰ فارن ہائٹ پر کڑھوائی کا اختلاف نما کیسینو کے نظریہ کی بموجب ۱۸۳...۱۱۰ ہوگا۔

مثال ۳ - ضابطہ (۲) سے بتاؤ کہ راسی فاصلہ ۶۱° ۴۸' پر انعطاف آسکتا ہے (دباؤ = ۲۰ اوتیش ت = ۵۰ فارن ہائٹ) -

مثال ۴۔ بتاؤ کہ اگر وہ مقداریں جو ثانیہ کے پانچویں حصہ سے کم ہوں نظر انداز کر دی جائیں تو اختلاف کے جملہ کی دوسری رقم ترک کیا جاسکتی ہے جب کبھی اسکی فاصلہ ۵۵ سے تجاوز نہ ہو۔

مثال ۵۔ اگر ہم اعطاف کو معمولی شکل کے مس ی میں جہاں ی ظاہری راسی فاصلہ ہے بیان کرنے کی بجائے شکل کے مس ی میں بیان کریں جہاں ی حقیقی راسی فاصلہ ہے تو ثابت کرو کہ اگر ک اور ک دونوں قوس کے شانہوں میں بیان کئے گئے ہوں تو

ک = ک (ا-ک قٹا ی جب ا)

۴۴۔ کرہ ہوائی کے انعطاف کے لیے دیگر ضابطے۔

یہ ظاہر ہے کہ ہوا کی کثافت گھٹتی جاتی ہے جیسے زمین سے اُس کا فاصلہ بڑھتا ہے۔ پس کرہ ہوائی کا انعطاف مسا ۱۶۰۰۰۰۲۹۴ سے

جو زمین کی سطح پر اس کی قیمت ہے قیمت ایک گھٹے گا جو انعطافی کرہ ہوائی کے اوپر کے حدود پر اس کی قیمت ہے۔

دفعہ ۴۱ کے مطابق فرض کرو کہ سب سے بچلی کرہ ہوائی کی تہہ کا نصف قطر  $\frac{1}{2}$  ہے جس کے لیے  $m = m'$  اور غہ اس تہہ کا نصف قطر ہے جبکہ مہ گھٹا کر ایک ہو گیا ہے۔ سمپسن (Simpson) نے یہ مان

لیا کہ  $r = m' + 1 = r$  جہاں  $n$  ایک مقدار ہے جو فی الحال غیر معلوم ہے۔

مفروضہ مساوات سے  $r = r'$  حاصل ہوتا ہے جبکہ  $m = m'$  اس کا مساوات کی ترکیب میں اولاً خیال رکھا گیا تھا۔ جیسے  $r$  بڑھتا ہے مہ گھٹنا چاہئے اور یہ اس صورت میں ہو گا جبکہ  $(n + 1)$  مثبت ہو۔

ہم دفعہ ۴۱ میں دیکھ چکے ہیں کہ مہ  $r$  جب  $m = m'$  مستقل کرہ ہوائی کے اوپر کے اور نیچے کے حدود کے لیے اس حاصل ضرب کی جو قیمتیں ملتی ہیں ان کو مساوی رکھنے سے

$$m' + 1 = r \text{ جب } y$$

جہاں  $y$  بالآخرین تہہ پر وقوع کا زاویہ ہے اور  $y'$  زیر ترین تہہ پر وقوع کا

زاویہ۔  $r$  کی بجائے مساوات  $r = m' + 1 = r$  سے حاصل شدہ قیمت

رکھی جائے تو

$$m' + 1 = r \text{ جب } y$$

$$\text{اس لیے } y = m' + 1 \text{ جب } y$$

$$y = m' + 1 \text{ جب } y$$

$$ab = m' + 1 = r \text{ کا لو کار تہی تفرقی لینے سے}$$

$$(n + 1) \frac{1}{m'} + \frac{1}{m'} = 0$$

اس لیے دفعہ ۴۱ کی مساوات (۲) سے

$$\frac{ن}{م} = \frac{عم}{فرزہ}$$

اور دفعہ ۴۱ کی مساوات (۳) سے

$$\frac{فرزہ}{ن} = \frac{۱}{ن}$$

انعطاف معلوم کرنے کے لیے ہمیں اس جملہ کو فیہ کی ان قیمتوں کے درمیان تکمیل کرنا ہوگا جو کرہ ہوائی کے حدود پر لی گئی ہوں۔ زمین کی سطح پر انعطاف کا زاویہ ی ہے اور کرہ ہوائی کی اوپر کی حد پر انعطاف کا زاویہ

$$\frac{جب}{م}$$

ہے۔ اس لیے انعطاف کے لیے سمپسن کا صب ذیل ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$غہ = \frac{۱}{ن} \{ ی - جب \} \left( \frac{جب}{م} \right)$$

مثال ۱۔ اگر  $م = ۱ + سہ$  جہاں سہ ایک چھوٹی مقدار ہو جس کی دو سے اعلیٰ ترقوتیں نظر انداز کی جاسکتی ہیں تو ثابت کرو کہ سمپسن کے ضابطہ سے انعطاف کے لیے صب ذیل تقریبی جملہ حاصل ہوتا ہے

$$غہ = \left( \frac{سہ}{ن} - \frac{سہ}{ن} \right) مس ی - \frac{سہ}{ن} مس ی$$

مثال ۲۔ یہ مان کر کہ مشاہدہ سے انعطاف کا کلیہ (دفعہ ۴۲)

$$غہ = ۵۸۶۲۹۲ سہ ی - ۱۰۶۶۸۲ سہ ی$$

حاصل ہوتا ہے ثابت کرو کہ سمپسن کے ضابطہ سے زمین کی سطح پر ہوا کے انعطاف نما مہ کی قیمت ۲۸ ... ۱ حاصل ہوتی ہے اور نیزہ کن = ۸ اور

$$\frac{م}{ن} = \frac{۹}{۱۰}$$

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ اگر سمپسن کا ضابطہ صحیح ہوتا تو کرہ ہوائی کی

بلندی جہاں تک کہ وہ انعطاف کے لیے موثر ہے تقریباً دس میل ہوتی۔  
براڈلے (Bradley) نے ایک آسان ضابطہ سمپسن کے محصلہ بالا  
ضابطے سے اخذ کیا ہے جو حسب ذیل ہے: سمپسن کا ضابطہ ہے

$$\text{غہ} = \frac{1}{n} - (\text{ی} - \text{جب} \frac{1}{\text{میں}})$$

اسے لکھا جاسکتا ہے جب (ی - ن غہ) = جب ی | میں

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{جب ی} - \text{جب (ی - ن غہ)}}{\text{میں} - 1} = \frac{\text{جب ی} + \text{جب (ی - ن غہ)}}{\text{میں} + 1}$$

(۱۳۰)

یا چونکہ انعطاف ایک مجموعی مقدار ہے اس لیے

$$\text{غہ} = \frac{2}{n} - \frac{1}{\text{میں} + 1} \text{مس (ی} - \frac{1}{n} \text{ن غہ)}$$

اگر ہم مثال ۲ صفحہ ۱۹۶ سے مہ اور ن کی دی ہوئی قیمتیں لیکر اسیں  
درج کریں تو تقریبی ضابطہ

$$\text{غہ} = 59 \text{ مس (ی} - ۴ \text{غہ)}$$

ماصل ہوتا ہے۔

ہم اس ضابطہ کی تصحیح اس طرح کر سکتے ہیں کہ وہ معیاری تپش اور  
دباؤ پر دو معلومہ انعطافوں کے لیے ٹھیک ہو جائے، مثلاً اگر ہم لیں

$$\text{ی} = 50^\circ \text{، غہ} = 69.36$$

$$\text{ی} = 45^\circ \text{، غہ} = 61.10$$

(دیکھو گرنوچ کی جدولیں) تو براڈلے کا ضابطہ شکل

$$\text{غہ} = 58.361 \text{ مس (ی} - 9.۰۹ \text{غہ)}$$

میں ماصل ہوتا ہے۔ اس ضابطہ سے ۸۰ کے ماسی فاصلہ تک سب انعطاف  
تقریبی طور پر معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

براڈلے کا ضابطہ افق کے قریب مشاہدات کے لیے موزوں  
ہے کیونکہ جس وقت ی کی قیمت ۹۰ کے قریب آتی ہے تو مس (ی - ۹.۰۹ غہ)

لا انتہا بڑا نہیں ہو جاتا۔

مثال ۱۔ بتاؤ کہ انعطاف کے لیے براؤ لے اور کیسینی کے ضابطہ

$$\text{غہ} = 5863261 \text{ مس (ی - ۴۶۰۹ غہ)}$$

$$\text{اور غہ} = 5862942 \text{ مس ی - ۶۶۸۲ مس ی}$$

علمًا مماثل ہیں بشرطیکہ اسی فاصلہ بہت بڑا نہ ہو۔

مثال ۲۔ اس مفروض کی بناء پر کہ کرہ ہوائی کے انعطاف نما

کی (ن + ۱) دین قوت زمین کے مرکز سے فاصلہ کے بالعکس بدلتی ہے

ایستی انعطاف کے لیے براؤ لے کا تقریبی ضابطہ

$$\text{غہ} = \text{مس (ی - } \frac{1}{4} \text{ ن غہ)}$$

ثابت کرو۔

مثال ۳۔ اگر کرہ ہوائی میں کسی نقطہ پر انعطاف نما زمین کے

مرکز سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلے اور زمین کی سطح پر سبہ ہوا اور کرہ ہوائی

کی حد پر اکائی ہو تو ثابت کرو کہ انعطاف کے لیے متناظر تصحیح

$$\text{جب (ی + } \frac{1}{4} \text{ غہ) = مابہ جب ی}$$

(Math. Trip. 1906)

سے حاصل ہوتی ہے۔

۴۵۔ کرہ ہوائی کے دباؤ اور اسکی تپشکی اثر انعطاف پر۔

انعطاف کے ضابطہ (۲) میں جو دفعہ ۴۳ میں حاصل کیا جا چکا،

ہم نے مان لیا تھا کہ باریمیا کا ارتفاع ۳۰ انچ اور بیرونی ہوا کی تپش ۵۰

فارن ہائٹ ہے۔ اب ہمیں وہ ضابطہ معلوم کرنا ہے جو دباؤ اور تپش

کی دیگر دی ہوئی قیمتوں پر استعمال کرنا ہوگا۔

ہم تسلیم کر لیتے ہیں کہ زمین کی سطح پر انعطاف ہوا کی کثافت

کے متناسب ہے، اس لیے اگر دباؤ د اور تپش ت پر انعطاف غہ

ہو اور معیاری دباؤ ۳۰ انچ اور تپش ۵۰ پر انعطاف غہ ہو تو گیسوں کے

(۳۱)

خواص سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱۴}{۲۶۰ + ت} = \frac{۵۰ + ۲۶۰}{۳۰} = \frac{۳۱۰}{۳۰}$$

غیر کی وہ قیمت درج کرنے سے جو دفعہ ۴۲ میں معلوم ہو چکی ہے دباؤ د اور تیش ت پر ظاہری راسی فاصلہ ی کے لیے کرہ ہوائی کے انعطاف کا تقریبی ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱۴}{۲۶۰ + ت} = \frac{۵۰ + ۲۶۰}{۳۰} = \frac{۳۱۰}{۳۰}$$

گر نیوچ آبزرویشن (Gre. Observations) بابت ۱۸۹۸ء کے ضمیمہ میں مسٹری۔ ایچ کاویل (Cowell) نے انعطاف کی ان جدولوں کو مرتب کیا ہے جو گر نیوچ کی رصد گاہ میں استعمال کی جاتی ہیں ان جدولوں میں صفر درجہ سے ۸۸.۰۰ تک راسی فاصلہ کے ہر منٹ کے لیے اوسط انعطافات ۳۰ انچ دباؤ اور ۵۰ فارن ہائٹ تیش کیلئے درج ہیں۔ وہ تصحیحات جو تیش اور دباؤ میں تغیرات واقع ہونے کی وجہ سے عمل میں لانی ہوں گی دوسری جدولوں میں دی جاتی ہیں۔

## ۴۶۔ مشاہدہ سے کرہ ہوائی کے انعطاف کی تعیین۔

انعطاف کے جملہ ا س ی + ب س س ی کے سروں ۱ اور ب کو نصف النہاری راسی فاصلوں کا مشاہدہ کر کے مختلف طریقوں پر متعین کیا جاسکتا ہے ان میں سے تین طریقے ہم یہاں بیان کریں گے۔

پہلا اور دوسرا طریقہ ایک ہی رصد گاہ میں استعمال کیا جاسکتا ہے بشرطیکہ رصد گاہ کا عرض بلد نہ تو بہت بڑا ہو نہ بہت چھوٹا۔ تیسرے طریقہ میں دو رصد گاہوں کی شرکت عمل ضروری ہے جن میں سے ایک شمالی نصف کرہ زمین میں اور دوسری جنوبی نصف کرہ زمین میں واقع ہو۔



**پہلا طریقہ**۔ ایک ایسے ستارہ کا انتخاب کیا جاتا ہے جو

بالائی اور زیرین دونوں تکبندوں کے وقت افق کے اوپر ہو۔ اگر بالائی اور  
زیرین تکبندوں پر ظاہری راستے کے واسطے علی الترتیب 'ی' ہوں اور یہ فاصلے  
راس کے شمال کی جانب مثبت ہوں تو اصلی راستہ فاصلے

$$y + (ms - y) + (sb - ms)$$

$$y + (ms - y) + (sb - ms)$$

اور

ہوں گے۔ ان دو راستے فاصلوں کا اوسط وہی ہے جو راس سے شمالی قطب کا  
فاصلہ ہے یعنی عرض التمام۔ پس ہمیں مساوات حاصل ہوتی ہے (۱۳۲)

$$\frac{1}{2} (y + y) + (ms - y) + (sb - ms) = 90^\circ - \phi$$

ی اور 'ی' کی مشاہدہ کردہ قیمتیں درج کرنے سے تین مقداروں (ب  
اور  $\phi$  میں ایک خطی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

دوسرے ستاروں کا اسی طرح مشاہدہ کیا جاتا ہے اور ہر ستارے  
سے انہی تین مجہول مقداروں (ب،  $\phi$  اور  $\phi$  میں ایک خطی مساوات  
حاصل ہوتی ہے۔ ایسی تین مساواتیں (ب،  $\phi$  اور  $\phi$  کو متعین کرنے کے  
لیے کافی ہیں۔ بریں ہم نتیجہ زیادہ تر ترجیح ہو گا اگر ہم بہت سے ستاروں کا  
مشاہدہ کریں اور پھر محصلہ مساواتوں پر اقل ترین مربعوں کا طریقہ استعمال  
کریں جو بعد میں بیان کیا جائے گا۔

ایک سادہ مثال کے طور پر ہم ایک ایسی صورت لیں گے  
جس میں عرض بلد معلوم ہو اور جس میں چونکہ کوئی راستہ فاصلہ بہت بڑا نہیں  
ہے اس لیے ہم یہ مان سکیں گے کہ انعطاف ایک ہی رقم ک مس ی  
سے بیان ہوتا ہے۔

ڈنسنک (Dunsink.) میں جو شمالی عرض بلد  $53^\circ 23'$  پر  
واقع ہے ستارہ غد قیفاؤس (a Cephei) کا مشاہدہ کیا گیا تو معلوم ہوا کہ

بالائی تکبید پر ظاہری راسی فاصلہ  $۸^{\circ} ۴۸' ۳۰''$  ہے اور  $۱۲$  انگشتوں کے بعد زیرین تکبید پر اس کا ظاہری راسی فاصلہ  $۴۴^{\circ} ۲۲' ۹''$  ہے۔  
اس لیے اصلی راسی فاصلے

$۸^{\circ} ۴۸' ۳۰'' + ک = ۸^{\circ} ۴۸' ۳۰''$   
 $۴۴^{\circ} ۲۲' ۹'' + ک = ۴۴^{\circ} ۲۲' ۹''$   
ہوں گے ان کا مجموعہ عرض انعام  $(۳۶^{\circ} ۳۶' ۴۰'')$  کا ڈگنا ہونا چاہیے  
اس لیے

$$۳۶^{\circ} ۳۶' ۴۰'' + ۲۴^{\circ} ۱۱' ۵۵'' = (۲۱۰۸۵ + ۰۰۱۵۵) = ۲۱۲۰۰ = ک$$

دوسرا طریقہ۔ انقلابوں پر سورج کے راسی فاصلوں کا

مشاہدہ کرنے سے بھی انعطاف کے مستقل معلوم کئے جاسکتے ہیں۔  
فرض کرو کہ انقلابوں پر سورج کے ظاہری نصف النہاری راسی  
فاصلے  $ی$ ،  $ی$  ہیں۔ فرض کرو کہ ان کے جواب میں انعطاف غم اور غم  
ہیں۔ اس لیے اصلی راسی فاصلے  $ی$ ،  $ی$  اور  $ی$ ،  $ی$  + غم ہیں۔ یہ مان لو  
کہ سورج کے عرض بلد کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے یا دوسرے الفاظ میں  
سورج کا مرکز فی الواقع طریقی الشمس میں ہے جو ہمیشہ بڑی حد تک درست  
ہے تو ان راسی فاصلوں کا اوسط وہ قوس ہے جو اس سے خط استوا تک  
کھینچی گئی ہے یعنی عرض بلد۔ اس لیے

$$۲ \text{ فہ} = ی + ی + غم + غم$$

(۱۳۳) اگر عرض بلد معلوم ہو اور اگر ہم یہ مان لیں کہ

$$غم = ک \text{ مس } ی \text{ اور غم} = ک \text{ مس } ی$$

تو ک کے لیے ایک مساوات حاصل ہوتی ہے۔

**تیسرا طریقہ** - اس میں ایک ہی ستارہ سے کئی

فاصلے سے کرا اور میں کرا دو مختلف رصد گاہوں سے مشاہدہ کئے جاتے ہیں، فرض کرو کہ ان میں سے ایک رصد گاہ شمالی عرض بلد قم پر واقع ہے اور دوسری جنوبی عرض بلد قم پر (دیکھو شکل ۴۵) - اگر شمالی اور جنوبی قطب مساوی قی اور قی ہوں تو

$$\text{میں کرا} = \text{س ق} - \text{کرا قی} = \text{قم} - \text{ضہ}$$

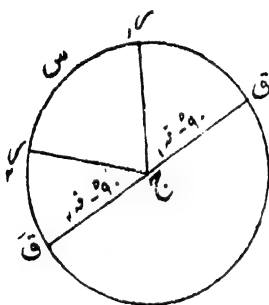
$$\text{میں کرا} = \text{س ق} - \text{کرا قی} = \text{قم} + \text{ضہ}$$

اگر مشاہدہ کر دہ

رہی فاصلے کی اور میں ہوں اور اگر ہم انعطافوں کو ک میں کی اور ک میں کی مان لیں تو

$$\text{میں کرا} = \text{کی} + \text{ک میں کی}$$

$$\text{میں کرا} = \text{کی} + \text{ک میں کی}$$



شکل (۴۵)

$$\text{پس کی} + \text{ک میں کی} + \text{کی} + \text{ک میں کی} = \text{قم} + \text{ضہ}$$

اس مساوات سے ک معلوم کیا جاسکتا ہے -

ہم مثال کے طور پر ستارہ *مرآة المسدس* (ب) (*β Andromedae*) لیں گے - اس ستارہ کو گزینچ جس کا عرض بلد ۵۱° ۲۸' ۳۸" مش ہے بوقت تکبیر مشاہدہ کیا گیا تو معلوم ہوا کہ اس کا جنوبی ظاہری راستہ فاصلہ ۱۶۰° ۲۰' تھا - اس ستارہ کو اس امید کی رصد گاہ پر بھی جس کا عرض بلد

۳۳ ۵۶ ۴۴ ج ہے بوقت تکبید مشاہدہ کیا گیا تو معلوم ہوا کہ اس کا شمالی  
ظاہری راسی فاصلہ ۶۹ ۱ ۵۰ تھا۔ اس لیے ہمیں حسب ذیل مساوات  
حاصل ہوتی ہے

$$۲۰۹۶ + ۳۰۱۶ \text{ ک مس} + (۲۰۹۶ + ۵۰۱۶ \text{ ک مس}) (۲۰۹۶)$$

$$۵۰۱۶ \text{ ک مس} = ۲۰۹۶$$

$$\text{ک مس} = ۵۰۱۶$$

بس سے

۴۷۔ انعطاف کا اثر ساعتی زاوے اور میل پر۔

کسی ستارے کے ساعتی زاوے اور میل پر انعطاف کا اثر معلوم کر نیکی  
لیے دفعہ ۳۵ کے تفرقی ضابطے استعمال کیے جاسکتے ہیں۔ انعطاف کا اثر  
یہ ہوتا ہے کہ ستارہ اپنی اصلی مقام سے راس کی طرف ذرا اوپر اٹھا ہوا  
دکھائی دیتا ہے۔ اگر مشاہدہ کردہ راسی فاصلہ ہی ہو تو اصلی راسی فاصلہ  
ی + مف ی ہوگا جہاں مف ی = ک مس ی۔ ہم مان لیتے ہیں  
کہ عرض بلد معلوم ہے، اس لیے مف فہ =۔ اور چونکہ سمت انعطاف  
سے نہیں بدلتا اس لیے مف ل =۔

اب ستارہ کے میل پر انعطاف کا اثر معلوم کرنے کے لیے ہم  
وہ ضابطہ لکھ لیتے ہیں جو مف ل، مف فہ، مف ی، مف فہ کے  
درمیان ہے (دیکھو دفعہ ۳۵ (۱) یعنی

مف فہ + جم عا مف ی - جم س مف فہ - جب س جم فہ مف ل =۔  
اس مساوات میں رکھو مف ل =، مف فہ =، مف ی = ک مس ی تو

$$\text{مف فہ} = - \text{ک مس ی جم عا}$$

یعنی اگر ضہ مشاہدہ کردہ میل ہو تو ضہ - ک مس ی جم عا اصلی میل ہے۔

ساعتی زاویہ پر انعطاف کا اثر معلوم کرنے کے لیے دفعہ ۳۵ کا

ضابطہ (۲)

$$\text{مف ی} + \text{جم ل مف فہ} + \text{جم عا مف ضہ} + \text{جم فہ جب ل مف س} =$$

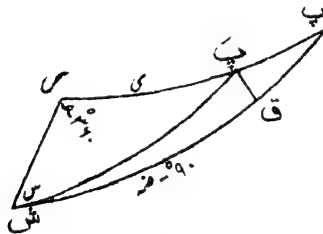
لکھ لو اور وہی اندراجات عمل میں لاؤ تو

مف س = ک جب عامس ی قطضہ  
اختلاف منطری زاویہ پر انعطاف کا اثر معلوم کرنے کے لیے ہم دفعہ ۲۵ کا  
ضابطہ (۶)

مف عا = جم ی مف لا ۴ جب ضہ مف س - جب لا جب ی مف فہ =  
استعمال کرتے ہیں تبس سے حاصل ہوتا ہے

مف عا = ک جب عامس ضہ مس ی  
محصلہ بالانتیجوں کو دوسری طرح حسب ذیل طریقہ پر ثابت کیا جاسکتا  
ہے - شکل (۶۶) میں ش قطب شمالی، س راس، پ ستارہ کا اصلی مقام،  
پ ستارہ کا ظاہری مقام بوجہ انعطاف، اور پ پ = ک س راس پ = ک مس ی -  
نیز پ ق، پ ش پر عمود ہے اور اگر زاویہ پ ش پ چھوٹا ہو جیسا کہ  
بالعموم ہوتا ہے بشرطیکہ پ قطب کے نزدیک نہ ہو تو قطبی فاصلہ  
میں تبدیلی حسب ذیل ہے

$$\begin{aligned} \text{پ ق} &= \text{پ پ} - \text{مس عا} \\ &= \text{ک مس ی جم عا} \end{aligned}$$



شکل (۶۶)

مشاہدہ کردہ میل - ۹ - ش ق ہے لیکن اصلی میل ۹۰ - ش پ  
ہے - اس لیے مشاہدہ کردہ میل پر مفضہ کی تصحیح عمل میں لانی چاہئے

(۱۳۵) تاکہ اصلی میل حاصل ہو اور مف ضہ حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے  
مف ضہ = ک مس ی جم عا

نیز  
مف س = پ ش ق = ک مس ی جب عا ق م پ ش  
= ک مس ی جب عا ق م ضہ

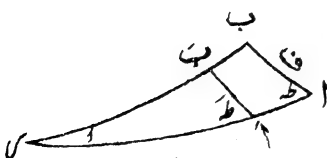
نیز چونکہ مف عا مف ضہ انعطاف سے نہیں بدلتا اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہئے

جم عا جم ضہ مف عا = جب عا جب ضہ مف ضہ  
اس میں مف ضہ کی بجائے اس کی قیمت درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے  
مف عا = ک جب عا مس ضہ مس ی

۴۸۔ انعطاف کا اثر دو قریبی سماوی نقطوں کے درمیان  
ظاہری فاصلہ پر۔

ہم اول یہ بتائیں گے کہ اگر انعطاف کو ک مس ی لیا جائے تو دو  
قریبی ستاروں کے درمیان ظاہری فاصلہ ف میں جسے قوس کے ثانیوں  
میں لیا گیا ہو جب ذیل تشریح جمع کرنی ہوگی جو قوس کے ثانیوں میں ہے:

ک ف (۱ + جم طہ مس ی) جب ا  
جہاں صدر تارے کا راسی فاصلہ ی ہے اور طہ وہ زاویہ ہے جو ان  
دو ستاروں کو ملانے والی قوس اور اس قوس کے درمیان ہے جو صدر تارے  
سے اس تک پہنچی گئی ہو۔



شکل (۴۸)

فرض کرو کہ سر راس ہے  
ا = لا، سر ب = ما،  
ا ب = ف، زاویہ  
ا سر ب = ا، اور زاویہ  
ا سر ا ب = طہ۔ انعطاف کا

اثر یہ ہوگا کہ قوس  $\Delta$  ب راس کی طرف اوپر کو  $\Delta$  ب تک ہٹی ہوئی ہوگی جہاں

$$\Delta \text{ ب} = \text{ک مس لا}$$

$$\text{ب ب} = \text{ک مس ما}$$

اور  
اس لئے

جم ف = جم لا جم ما + جب لا جب ما جم و  
و کو مستقل سمجھ کر تفریق کرنے اور

$$\text{مف لا} = \text{ک مس لا}$$

$$\text{مف ما} = \text{ک مس ما}$$

رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

- جب ف = مف ف = ک جب لا جم ما + ک جم لا جب ما مس ما

- ک جم و جم لا جب ما مس لا - ک جم و جب لا جم ما مس ما

= ک جب (لا - ما) قط لا قط ما + ک جب (لا - ما) جب لا جب ما

اب چونکہ یہ دونوں نہیں چھوٹی ہیں جملوں قط لا قط ما اور جب لا جب ما میں

لا = ما ی (کسی ایک ستارہ کا راسی فاصلہ) رکھ سکتے ہیں - نیز چونکہ

و، ف چھوٹے ہیں ہم رکھ سکتے ہیں

جب ف = ف = جب (لا - ما) = ف جم ط

اور م جب لا = و = ف = ف جب ط قم ی

اس لیے ف میں سے جو مقدار انعطاف کی وجہ سے تفریق کرنی ہوگی

وہ یہ ہے

ک ف (ا + جم ط مس ی)

یا اگر ک، ف، مف ف قوس کے ثانیوں میں بیان کئے گئے ہوں تو

ک ف (ا + جم ط مس ی) جب آ

سے ثانیوں کی وہ تعداد حاصل ہوگی جس بقدر فاصلہ ف انعطاف

کی وجہ سے گھٹ چکا ہے - اس لیے یہ وہ تصحیح ہے جو دو قریبی ستاروں کے

(۱۳۶)

درمیان پیمائش شدہ فاصلہ پر عمل میں لانی ہوگی تاکہ انعطاف کے اثر کو رفع کیا جائے۔

اس کے بعد اب یہ ثابت کرنا ہے کہ زاویہ طہ جو این دو ستاروں کو ملائے والے خط اور انتصابی کے درمیان ہے انعطاف کی باعث ک جب طہ جم طہ سس ی کی حد تک بڑھ جاتا ہے۔

مسادات

ف جب طہ = جب ا جب ما

کاکو کارتی تفرقی لینے سے حاصل ہوتا ہے

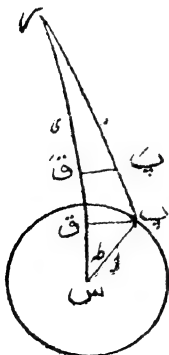
مف ف + مم طہ مف طہ = مم ما مف ما

جو اندراج سے ہو جاتا ہے

ک (ا + جم طہ سس ی) + مم طہ مف طہ = ک

اس لیے مف طہ = ک جب طہ جم طہ سس ی اور یہ وہ مقدار ہے جسے ظاہری زاویہ ب ا س میں سے تفریق کرنا ہوگا تاکہ اصلی زاویہ ب ا س حاصل ہو۔

چاند یا سورج کی دائری قرص کی شکل میں انعطاف کی باعث جو بگاڑ واقع ہوتا ہے اُسے حسب طریقہ ذیل معلوم کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ سورج کا مرکز س



شکل (۴۸)

(شکل ۴۸) ہے، اس کا نصف قطر ا، اس کے گھیرے پر کوئی نقطہ پ، اور اس کا ہے۔ فرض کرو کہ س سس ی۔ فرض کرو کہ انعطاف کا مرکز ہ جس کی وجہ سے



پ میں پ تک ہٹاؤ واقع ہوتا ہے اور فرض کرو کہ پ ق اور پ ق، سرس پر عمود ہیں۔ دفعہ گذشتہ کی رو سے ہم دیکھتے ہیں کہ پ ق انعطاف کی باعث پ ق تک ہٹ جاتا ہے۔ اگر ہم سر کو مبدا قرار دیں اور سر کو لا کا محور اور اس طرح پ کے محدود لا اور ما ہوں تو

$$ما = پ ق = (ا-ک) پ ق = (ا-ک) جب ط$$

$$لا = سر ق = (ا-ک) سر ق + (ا-ک) ق$$

$$= (ا-ک) سر ق + (ا-ک) ق$$

$$= (ا-ک) سر ق + (ا-ک) ق$$

اس لیے ط کو سا قہ کرنے سے سورج کی منعطف شکل کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$1 = \frac{ا^2}{(ا-ک)^2} + \frac{(ا-ک) سر ق^2}{(ا-ک) ق^2}$$

اس کا محور اعظم (ا-ک) ہے اور محور اصغر (ا-ک) قطبی۔ ان محوروں میں نسبت ا-ک سر ق ہے۔ بلاشبہ یہاں ک نیم قطری زاویوں میں ہے۔

ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی چھوٹی افقی قوس انعطاف کی وجہ سے نسبت ا-ک: ا میں گھٹ جاتی ہے اور کوئی چھوٹی انتصابی قوس جو ایک معتد بہ راسی فاصلہ پر ہو نسبت ا-ک قطبی: ا میں گھٹ جاتی ہے۔

مثال ۱۔ اگر دو قریبی ستاروں کے درمیان میل کا فرق ف ہو اور اگر ان میں سے ایک ستارہ کا راسی فاصلہ ی اور اختلاف منظری زاویہ عا ہو تو انعطاف کا اثر ہو گا کہ میل کا فرق بقدر

ک ف (ا+سر ق) جم عا جب ا کے گھٹ جائیگا۔ یہ مان لیا گیا ہے کہ انعطاف راسی فاصلہ کے محاس کے

(۱۳۰)

متناسب ہے اور انعطاف کا مرکز ہے۔

پس ان دو ستاروں کو ملانے والی قوس کا ظل ان میں سے ایک ستارہ میں سے گزرنے والے ساعتی دائرہ پر ف ہے اور یہ ساعتی دائرہ راسی فاعلہ کے ساتھ زاویہ عا بنانا ہے۔

مثال ۲۔ عرض بلد  $۵۳^{\circ} ۳۰'$  ش  $۱۳۰^{\circ} ۳۰'$  میں موقعہ ایک رصد گاہ کی دور بین کو  $۳۸^{\circ} ۹'$  شمالی میل کے توازی پر کے ایک نقطہ کی طرف لگایا گیا ہے اور ۷ گھنٹیوں کے ساعتی زاویہ پر ثابت کیا گیا ہے۔ دو ستارے یکے بعد دیگرے میدان نظر میں سے گزرتے ہیں اور ان کے میل کا ظاہری فرق  $۲^{\circ} ۶۸'$  ہے۔ ثابت کرو کہ انعطاف کا اثر رخ کرنیکے لیے اس فرق کو بقدر  $۰.۰۹''$  کے بڑھانا ہوگا۔

(ان میں سے ایک ستارہ دجاہ ۶۱ (61 cygni) ہے اور دوسرا ستارہ مقابلہ کرنے کے ان ستاروں میں سے ایک ہے جو رصد گاہ ڈنسنک (Dunsink) میں دجاہ ۶۱ کا اختلاف منظر میل کے فرقوں کے طریقہ سے معلوم کرنے میں استعمال کئے گئے تھے۔)

مثال ۳۔ متعدد ستارے اپنے غیر منعطف معلوں میں ایک چھوٹے منحنی پر واقع ہیں جس کی قطبی مساوات غہ = ف (ط) ہے جہاں غہ ایک بڑے دائرہ پر وہ فاصلہ ہے جو ایک نقطہ و سے جس کو مبدا قرار دیا گیا ہے منحنی پر کے ایک نقطہ پ تک ہے اور ط وہ زاویہ ہے جو و پ اور و س کے درمیان ہے جہاں س مشاہد کار اس ہے۔ ثابت کرو کہ انعطاف کا اثر ملحوظ رکھ کر منحنی کی قطبی مساوات حسب ذیل مساواتوں سے غہ اور ط کو ساقل کرنے سے حاصل ہوگی:-

$$\text{غہ} = \text{ف} (\text{ط})$$

$$\text{غہ} = \text{غہ} - \text{ک} (\text{ا} + \text{مس}^2 \text{ی} \text{بم} \text{ط})$$

$$\text{ط} = \text{ط} + \text{ک} \text{جب} \text{ط} \text{بم} \text{ط} \text{مس}^2 \text{ی}$$

جہاں غہ وہ سمتی نیم دائرہ ہے جو نقطوں و اور پ کے درمیان ہے جو علی الترتیب

و اور پ کے منطف عمل ہیں، اور طہ وہ زاویہ ہے جو و پ کے واسطے کے ساتھ بناتا ہے۔

مثال ۴۔ سورج کا زاویہ قطر معلوم کرنا مقصود ہے۔ دو پیمائش کردہ قطروں کا حسابی اوسط جو ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں ف ہے۔ انعطاف کا سرک ہے جو نیم قطری زاویوں میں بیان کیا گیا ہے اور سورج کے مرکز کا راستی فاصلہ ی ہے۔ ثابت کرو کہ اصلی قطر ف (۱ + ک + ۱/۴ ک مس ی) ہے خواہ وہ زوایا کے محل کچھ ہی ہوں جن میں یہ دو قطر جو ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں ناپے گئے تھے۔ (یہ سوال ایک نتیجہ پر مبنی ہے جو مشاہدات گریونج "Gr. Observations" کے مقدمہ میں درج ہے)

قطع ناقص کے مرکز سے نقطہ طہ کا فاصلہ ۱ (۱ - ک - ک) حجم طہ مس ی (۱۳۸) ہے۔ اس لیے طہ اور طہ + ۹۰ پر یعنی ایک دوسرے پر علی القوائم نیم

قطروں کا حسابی اوسط ۱ (۱ - ک - ۱/۴ ک مس ی) = ۱/۴ ف ہے اور اس لیے ۱۲ = ف (۱ + ک + ۱/۴ ک مس ی)

۴۹۔ انعطاف کا اثر ایک دوسرے تارے کے زاویہ محل کی پیمائش پر۔

فرض کرو کہ اس زوج کا صدر تارہ اور ثنائی تارہ علی الترتیب ا ب ہیں جن سے یہ دو ہر تارہ بنتا ہے اور فرض کرو کہ قی شامی قطب ہے۔

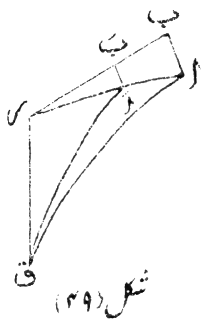
کرہ سماوی پر ایک دائرہ کا تصور کرو جس کا مرکز ا ہے اور جس کی درجہ بندی ایسی ہوئی ہے کہ مشاہد قطب ہے اور اق (۱۸۰) اس دائرہ کو صفر درجہ قطع کرتا ہے۔

وہ نقطہ جس میں ا ب اس درجہ دار دائرہ سے ملتا ہے ستارہ ا کے لحاظ سے ب کا زاویہ محل کہلاتا ہے۔ زاویہ محل کی پیمائش کے طریقہ کی مزید توضیح حسب ذیل کیجا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ دو ہر تارہ نصف النہار پر یا اس کے قریب ہے اور وہ اپنے بالائی ٹکبہ پر ہے اور ثنائی تارہ صدر تارہ کے مشرقی جانب ہے۔ تب زاویہ محل تقریباً ۹۰ ہے۔ لیکن اگر ثنائی تارہ مغربی جانب ہو تا جبکہ صدر تارہ نصف النہار پر ہو تو اس کا زاویہ محل

۲۷۰ ہوتا کیونکہ ہر صورت میں پوائنٹس کی سمت اس قوس سے جو قطب تک کھینچی گئی ہو رہی ہے۔ ہر سمت والے اسے بالعموم سمت نش - پب - ج - ا - (N.E.S.P.) کے نام سے جانتے ہیں کیونکہ یہ پوائنٹس شمالی نقطہ سے شروع ہو کر آسمان کے اس کی جانب سے گزرتی ہے جو یومی حرکت کے لحاظ سے پیچھے رہے ہیں اور پھر جنوب کے گرد ہوتے ہوئے شمال کی طرف آسمان کے اس حصے سے واپس ہوتی ہے جو آگے ہے۔

اگر قی قطب 'ر' راس 'اور دو ہرے تارہ 'ا' ب' کا مدار تارہ 'ا' جو (شکل ۴۹) تو زاویہ محل مسب تعریف سدرجہ بالا زاویہ قی 'ا' ب' ہے۔ انحناف زاویہ محل کو



زاویہ قی 'ا' ب' میں بدلتا ہے۔ اس طرح انحناف زاویہ محل کو دو طریقوں سے بدلتا ہے اولاً اختلاف منظر سری زاویہ قی 'ر' (ع) کو تبدیل کرتا ہے اور ثانیاً زاویہ 'ب' 'ا' کو۔ یہ دونوں زاویے انحناف کی باعث بدل جاتے ہیں اور مثلاً کردہ زاویہ محل پر جو تصحیح عمل میں

لائی ہوگی وہ اس صورت میں جو شکل (۴۹) میں ظاہر کی گئی ہے منفی ہونی چاہئے۔ ہم اصلی زاویہ محل کو م سے تعبیر کریں گے۔

پس زاویہ 'ب' 'ا' ر = م - عا' اور اس لیے (دفعہ ۴۸)

زاویہ 'ب' 'ا' ر = م - عا + ک جب (م - عا) جم (م - عا) مسری

زاویہ قی 'ا' ب' ر = عا + ک مسی مس ضہ جب عا

(۱۳۹)

پس اگر انحناف کی باعث زاویہ محل م ع ہو تو  
م ع + م + ک مسی مس ضہ جب عا + ک جب (م - عا) جم (م - عا) مسی

اگر اسی ابتدائی ستارے (صدر تارے) کے حوالے سے کسی دوسرے ستارے کے لیے متناظر ارقام مخرج اور م ہوں تو

مخرج = م + ک مس ی مس ضہ جب عاہک جب (م - عا) جم (م - عا) مس ی  
تقریباً کرنے سے یہ آسانی حاصل ہوتا ہے

م - م = مخرج - ک مس ی جب (م - م) جم (۲ عا - م - م)

ستارہ ۱ (یومی حرکت کی باعث جس سمت میں حرکت کرتا ہے اس کا اصلی زاویہ محل م ۲۷۰ ہے اس لیے اگر یومی حرکت کی باعث ۱ کی حرکت کے لیے مشاہدہ کردہ زاویہ محل مخرج ہو تو

م = مخرج + ۲۷۰ - ک مس ی جم م جب (۲ عا - م)

**خلاصہ** - گذشتہ دفعہ اور اس دفعہ سے کسی دو ہرے تارے

کے مشاہدہ کردہ فاصلہ اور زاویہ محل کی اس تصحیح کے لیے جو انعطاف کی باعث عمل میں لانی ہوگی حسب ذیل نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔  
فرض کرو کہ دو ستاروں کا فاصلہ جس کو قوس کے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہو، ف ہے، اسی فاصلہ، م زاویہ محل، عا اختلاف منظری زاویہ، اور ک انعطاف کا سر قوس کے ثانیوں میں ہے تو اصلی فاصلہ حاصل کرنے کے لیے جو تصحیح ظاہری فاصلہ میں جمع کرنی ہوگی وہ

ک ف { + مس ی جم (م - عا) } جب ا

لے ان تصحیحات کے اطلاق میں آسانی پیدا کرنے کے لیے جدولیں تیار کی گئی ہیں، ان کے لیے دیکھو

ہے۔ اور اصلی زاویہ محل حاصل کرنے کے لیے جو تصحیح پیمائش کر وہ زاویہ محل میں جمع کرنی ہوگی وہ

کسائی حجم م جب (۲-۷-۴)

ہے۔

مثال :- ستارہ صلیاق (۷) (a Lyrae) کا میل ۳۸° ۳۰' ہے اور مستعملہ ستارے کا زاویہ محل ۵۸۰° ۱۵۰' ہے۔ وہ تصحیح معلوم کر دو جو انھوں کی باعث اس زاویہ محل پر عائد کرنی ہوگی جبکہ ساعتی زاویہ ۷ گھنٹے مغرب ہو عرض بلد ۵۳° ۲۳' ہو اور انعطاف کا سر ۵۸° ۲۰' ہو۔

اولاً راسی فاصلہ ۶۷° ۳۶' اور اختلاف نظری زاویہ ۳۸° ۳۰' کا منسوب کر لینا ضروری ہے۔ پھر ضابطہ سے تصحیح ۶۷° حاصل ہوتی ہے جو مشاہدہ کردہ زاویہ محل میں جمع کرنی ہوگی تاکہ اُسے انعطاف کے اثر سے پاک کرے

(۱۴۰)

### انعطاف پر متفرق سوالات

مثال ۱ :- ثابت کرو کہ انعطاف کسی جرم کے راسی فاصلہ کی جیب کے نسبت (۱-ک) : ۱ میں گھٹاتا ہے جہاں ک انعطاف کا سر ہے۔

مثال ۲ :- ستارہ عقاب (۷) (a Aquilae) کا شمالی میل ۸° ۳۰' ہے۔ ثابت کرو کہ گریجویٹ (عرض بلد ۵۱° ۲۸' شمالی) پر بوقت تکبید اس کا ظاہری راسی فاصلہ ۴۲° ۵۰' ہے اور راس امید (عرض بلد ۳۳° ۵۶' ج) پر ۴۲° ۵۰' ہے۔

مثال ۳ :- اگر افقی انعطاف ۴۵° ہو تو ثابت کر دو کہ سورج کے طلوع یا غروب پر جبکہ اس کا میل ضہ ہو سورج کے مرکز کے ساعتی زاویہ اس کے لیے ضابطہ حسب ذیل ہے

$$\text{جسم } \frac{1}{p} \text{ س} = \text{قط فہ قط ضہ جسم} (۴۵ + ۱۷۵ - \frac{1}{4} \text{ فہ} - \frac{1}{4} \text{ ضہ}) \times$$

$$\text{جیب (۴۵ - ۱۷۵ - \frac{1}{4} \text{ فہ} - \frac{1}{4} \text{ ضہ})}$$

مثال ۴۔ اگر یہ مان لیا جائے کہ چاند وقت طلوع اختلاف منظر کی باعث ۵۹ میچے دب جاتا ہے اور انعطاف کی باعث ۳۵ مرتفع ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ اگر سامتی زاویہ س ہو اور میل ضہ ہو تو گرینوچ پر

$$\text{جم } \frac{1}{4} \text{ س} = [۱۲۰.۵۶] \text{ نقطہ ضہ جم } (۱۹.۳۷ - \frac{1}{4} \text{ ضہ}) \text{ جب } (۱۹.۳۷ - \frac{1}{4} \text{ ضہ})$$

مثال ۵۔ گرینوچ (عرض بلد ۵۱° ۲۸' ۳۸") میں بتاریخ ۱۸۹۳ فروری ۱۱ سے ۱۲ میل وقت طلوع ۱۲° ۴۹' ج تھا۔ اس کا ظاہری سامتی زاویہ معلوم کرو یہ مان لیا جائے کہ افقی انعطاف ۳۵ ہے۔

مثال ۶۔ ایک ستارہ کے ظاہری راستہ کا ظل افق کے مستوی ایک قطع ناقص ہے جس کا خروج المرکز جم فہ ہے جہاں فہ عرض بلد ہے۔ یہ ستارہ قطب سے دور نہیں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اس ستارہ کا راستی فاصلہ بہت بڑا ہو تو وہی صورت انعطاف کی باعث بدلے ہوئے ظاہری راستے کے لیے ہوگی۔  
[Coll. Exam.]

مثال ۷۔ ستارہ دھابہ (عد) (α Cygni) کا شمالی میل ۲۴° ۵۷' آ ہے (۱۹۰۹ء)۔ ثابت کرو کہ عرض بلد ۵۳° ۲۳' پر بلانی وزیرین تکبہوں کے وقت اس کے ظاہری راستی فاصلے علی الترتیب ۱۸° ۲۳' اور ۱۸° ۲۳' ہیں یہ مان لیا گیا ہے کہ انعطاف ۵۸۵۲۹۴ مس ی - ۸۲ ۶۶ ۷۰ مس ی

لیا جاسکتا ہے جہاں ی = ظاہری راستی فاصلہ۔

مثال ۸۔ ثابت کرو کہ اگر کسی خاص آن پر ایک ستارہ کا میل انعطاف سے غیر متاثر ہو تو یہ ستارہ قطب اور اس کے درمیان تکد کرتا ہے اور اس کا سمت زیر بحث آن پر اعظم ہے۔  
[Math. Trip 1]

ستارہ قطب کے گرد جو چھوٹا دائرہ مرکب کرتا ہے اس کو مس کرتا ہوا ایک بڑا دائرہ اس سے کھینچا جائے تو اس سے وہ نقطہ حاصل ہوتا ہے جہاں ستارہ

راسی فاصلہ اس کے قطبی فاصلہ پر علی القوائم ہوگا۔ یہ ظاہر ہے کہ ستارہ جس وقت نقطہ تماس پر واقع ہو تو اس کا سمت بڑے سے بڑا ہوگا اور اس سے بڑا سمت اسے کبھی حاصل نہیں ہو سکتا۔

**مثال ۹**۔ ثابت کرو کہ راسی فاصلہ کے ان حدود کے اندر نہیں (۱۴۱) انعطاف کو ک مس ی (یعنی ک x راسی فاصلہ کا تماس) لیا جاسکتا ہے کسی ستارہ کا ظاہری مقام ایک کو کبی یوم میں ایک مخروطی تراش مرسم کرتا ہے جو قطع ناقص یا قطع زائد ہوگی بموجب اس کے کہ جب 'فہ' ک جم 'ضہ' جہاں ضہ ستارہ کا میل ہے اور فہ مقام کا عرض بلد۔ اس بڑے دائرہ کو جو ستارہ کے اصلی مقام سے قطب تک کھینچا گیا ہو لا کا محور لینے سے منقطع مقام کے مستوی محدود

لا = ک مس ی جم عا، ما = ک مس ی جب عا  
حاصل ہوتے ہیں جہاں ی اور عا علی الترتیب راسی فاصلہ اور اختلاف منظر زاویہ ہیں۔ کر دی مثلث سے

جب ی جب عا = جم فہ جب ت جب ی جم عا = جم ضہ جب فہ۔ جب فہ جم فہ جم ت  
جم ی = جب ضہ جب فہ + جم ضہ جم فہ جم ت  
لا =  $\frac{\text{ک جم ضہ جب فہ} - \text{ک جب ضہ جم فہ جم ت}}{\text{جم ضہ جب فہ} + \text{جم ضہ جم فہ جم ت}}$  ما =  $\frac{\text{ک جم فہ جب ت}}{\text{جم ضہ جب فہ} + \text{جم ضہ جم فہ جم ت}}$   
ان سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب ت} = \text{مس فہ} \frac{\text{ما}}{\text{لا جم ضہ} + \text{ک جب ضہ}}$$

$$\text{جم ت} = \text{مس فہ} \frac{\text{ک جم ضہ} - \text{لا جب ضہ}}{\text{لا جم ضہ} + \text{ک جب ضہ}}$$

اس لیے ت کو ساخط کرنے سے  
ما + (ک جم ضہ - لا جب ضہ) = مم فہ (لا جم ضہ + ک جب ضہ)  
جسے لکھا جاسکتا ہے



لا (جب فہ - جم فہ) + ما جب فہ - لا جب فہ - لا جب فہ + ک (جب فہ - جب فہ) =  
اور ایک قطع ناقص ہے یا قطع زائد بموجب اس کے کہ جب فہ - جم فہ مثبت  
ہو یا منفی۔

مثال ۱۰۔ یہ تسلیم کر کے کہ انعطاف ایک چھوٹی مقدار ہے اور  
ر اسی فاصلہ کے متناسب ہے ثابت کرو کہ اگر ایک ہی ستارہ کو مختلف مقامات  
پر ایک ہی نصف النہار پر واقع ہیں ایک ساتھ مشاہدہ کیا جائے تو اس کے  
ظاہری مقامات ایک بڑے دائرہ کی قوس پر واقع ہوتے ہیں۔

[Coll. Exam.]

یہ سوال سب ذیل ہندسی مسئلے جو آسانی سے ربعی مثلثوں کے  
قاعدوں سے ثابت ہوتا ہے (دیکھو صفحہ ۸) فوراً حل ہو جاتا ہے۔ اگر دو  
ایک رُبع ہو اور وہ میں سے گزرنے والا ایک متغیر بڑا دائرہ دو ثابت بڑے  
دائروں کو جو  $\theta$  میں سے گزرنے میں علی الترتیب چپ اور قی میں قطع  
کرے تو  $\cos$  و  $\sin$  اس وق مستقل ہے۔

مثال ۱۱۔ اگر ایک ستارہ کامیل فہ ہو تو ثابت کرو کہ اگر افعی انعطاف  
ع ہو تو ستارہ کے ظہور کا وقت ایک مقام پر جس کا عرض البلد فہ ہے تقریباً

$$\frac{ع}{۱۵} \text{ ثانویوں}$$

کے نزدیک تبدیل ہوتا ہے۔

سب معمول ترقیم سے

$$\text{جم ی} = \text{جب فہ جب فہ} + \text{جم فہ جم فہ} \text{ جم ت}$$

تفریق کرنے سے (۱۴۲)

$$\text{فہ ی} = \text{جم فہ جب فہ جب ت منف ت}$$

لیکن ستارہ چونکہ افعی پر ہے اس لیے جب ی = ۱ اور

$$۰ = \text{جم ی} = \text{جب فہ جب فہ} + \text{جم فہ جم فہ} \text{ جم ت}$$

جم نہ جم نہ جب ت = (جم نہ جم نہ - جم نہ جم نہ جم ت)

= (جم نہ جم نہ - جب نہ جب نہ)

= (جم نہ - جب نہ)

اس لیے مف ی = (جم نہ - جب نہ) مف ت

اگر مف ی قوس کے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہو اور مف ت وقت کے  
ن ثنائے ہوں تو ہم رکھتے ہیں مف ی = ع اور مف ت = ۱۵ ن جن  
ن کے لیے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۲۔ یہ تسلیم کر کے کہ ایک ستارہ کے رہی فاصلہ ی میں  
انعطاف کی باعث تغیرک مس ی ہے جہاں ک چھوٹا ہے ثابت کرو کہ  
عوض بلدہ میں ایک دائرہ قطبی ستارہ کے ساعتی زاویہ میں پیدا شدہ تبدیلی  
بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ زاویہ ق مس ش ایک قائمہ زاویہ ہو جہاں  
ق قطب مس ستارہ اور ش افق کا شمالی نقطہ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ  
مس ی کی عظم قیمت

ک مس ق قط نہ اقط ی اقط ی

ہے جہاں ی اور ی مس ستارے کے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے  
راسی فاصلے ہیں۔

ساعتی زاوے س میں انعطاف کی باعث تبدیلی ک قط نہ جم نہ  
x جیب س ق ی ہے اور اگر جیب س ق ی اعظم ہو تو نقطہ س ش سے  
۹۰° ہے جہاں س ق مس ق کو ق سے اتنا فاصلہ کر کے حاصل کیا گیا  
ہے کہ س ق = ۹۰°۔

مثال ۱۳۔ یہ تسلیم کر کے کہ کسی جرم مس کا انعطاف ع ک مس س  
ثابت کرو کہ ص۔ ہ اور ش۔ ق۔ ف میں انعطاف کے اجزاء

تحلیلی جن کو علی الترتیب وقت کے ثانیوں اور قوس کے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہو تقریباً  
 $\frac{ک}{۱۵}$  جب ف جم (ف - ق لی) مس سر لی اور ک مس (ف ق لی)  
 ہیں جہاں ف جرم کا شمال قطبی فاصلہ ہے، ق قطب، اور سر لی ایک  
 بڑے دائرہ کی قوس ہے جو ک سے ق مس پر عمود کھینچی گئی ہے۔

مثال ۱۴۔ فرض کرو کہ مشاہد کا عرض بلد ف، ایک ستارہ کا میل  
 منہ، اس کا مغربی ساعتی زاویہ س، اور انعطاف کا سر ۵۸۴ ہے۔ ثابت  
 کرو کہ انعطاف کی وجہ سے ساعتی زاویہ کی تبدیلی کی ظاہری شرح میں  
 $۲۴۱۵$  جب م جم م (مس منہ + مم فہ ق س) تم (منہ + م) فی یوم  
 کی کمی ہوتی ہے جہاں مس م = مم فہ جم س۔  
 نیز ثابت کرو کہ میل میں انعطاف کی کثرت تبدیلی  
 $۱۵۶۳ +$  مم فہ جب س تم (منہ + م) جم م فی گھنٹہ  
 ہے۔

(۱۴۳)

انعطاف ستارہ کو اس کی طرف اُس کے اصلی مقام میں سے  
 ظاہری مقام میں تک اُٹھاتا ہے۔ فرض کرو کہ اصلی ساعتی زاویہ س  
 ہے اور ظاہری ساعتی زاویہ س ہے۔ قوس سر لی = ۹۰۔ ن کو ق مس  
 پر عمود کھینچو (شکل ۵۰)

(س - س) جم منہ = ک مس ی جب سر لی

= ک جم ن ق لی

ک جم فہ جب س

= جب فہ جب منہ + جم فہ جم منہ جم س

ت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر  
 $(\frac{ف س}{ف ت} - \frac{ف س}{ز ت})$  جم منہ

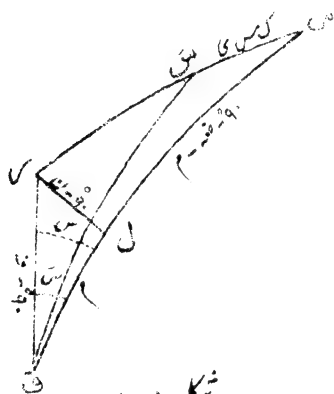
۱۔ جم فہ جم (ص) فہ جب فہ + جم فہ جم فہ جم (س) + جم فہ جم فہ جم (س) فہ

(جیب ف جیب ضہ + جہ فہ جہ ضہ جہ س) ۲

$$\text{کے چمڑے} = \frac{\text{چمڑہ نم + چمڑہ نم + چمڑہ نم}}{\text{چمڑہ نم}} = \frac{\text{چمڑہ نم}}{\text{چمڑہ نم}}$$

پہلے کہ ہم وہ جیسا (نند + م) جیسا (مسن نند + م) نہ قسط (فوس  
فرت

کے جس قدر جم نہ جم میں حجم (م) (نرس) نہ + م نہ قلس (م) فرس  
جس (م) نہ + م) جب نہ

$$\frac{\text{سبس ضدہ + نم نہ قضا م}}{\text{جبہ (ضدہ + م)}} \quad \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$$


$$\frac{\pi 2}{\pi 2 + 86200} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} \quad \text{،} \quad \frac{\pi 2}{86200} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$$

اور اس لیے

$$\frac{\pi 2}{86200} = \left( \frac{\pi 2}{\pi 2 + 86200} - \frac{\pi 2}{86200} \right) = \text{ک جب م جم م مس ضہ + مم ذ قط س} \quad \text{جب م (ضہ + م)} \quad 86200$$

چونکہ ع بہت چھوٹا ہے اس لیے ک = ۲۰۶۲۶۵ \ ۵۸۶۴ = ۲۰۶۲۶۵ رکھئے

$$\text{ع} = ۲۲۶۵ \text{ ش جب م جم م (مس ضہ + مم ذ قط س) قم (ضہ + م)}$$

جس میں مس م = مم ذ جم م  
کسی استوائی ستارہ کے لیے

$$\text{ضہ} = ۰ \text{ اور ع} = ۲۲۶۵ \text{ ش م م مم ذ قط س}$$

$$۲۲۶۵ \text{ ش قط اس}$$

اس طرح کوئی استوائی ستارہ خواہ وہ نصف النہار کے کسی جانب اسکے قریب ہی کیوں نہ ہو انعطاف سے اس طور پر متاثر ہوتا ہے کہ وہ ایک ایسی کوکبی گھڑی کے ساتھ دقت میں برابر رہتا ہے جو فی یوم ۲۲۶۵ کی شرح سے سست رہے۔

اگر نیل میں انعطاف لا ہو جسے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہو تو

$$\text{لا} = \text{ک مس ی جم م س م ل}$$

$$= \text{ک مس (۹۰ - ضہ - م)} = \text{ک مم (ضہ + م)}$$

اس لیے تفرق کرنے اور مف لا، مف م، اور مف س سب کو قوس کے ثانیوں میں بیان کیا ہوا سمجھنے سے

$$\text{مف لا} = \text{ک قم (ضہ + م) مف م جب آ}$$

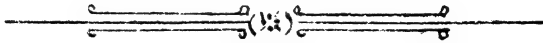
$$\text{مس م} = \text{مم ذ جم م}$$

$$\text{قط م مف م} = \text{مم ذ جب س مف س}$$

$$\text{اس لیے قط م مف لا} = \text{ک قم (ضہ + م) مم ذ جب س مف س جب آ}$$

اگر مشاقوس کے ثانیوں میں بیان کردہ وہ شرح فی ساعت ہو جس سے میل بدل رہا ہے تو مف ل\ مف س = مشاق ۱۵۰ x ۶۰ x ۶۰ - ان اندراجات کو عمل میں لانے سے اور ک اور جب ا کی قیمتیں داخل کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے یعنی

مشاق = ۱۵۰ x ۶۰ x ۶۰ = ۵۴۰۰۰ (ضہ + م) (جم + م) = ۵۴۰۰۰  
یہ نتیجہ ساوی عکاسی (فوٹو گرافی) کے فن میں عملی اہمیت رکھتے ہیں۔



# ساتوان باب

## کیپلر اور نیوٹن کے کھلے اور انکا استعمال

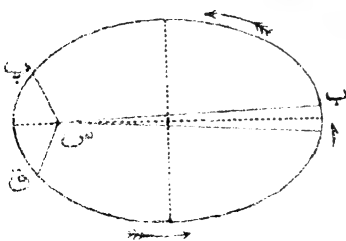
صفحہ

دفعہ

- ۵۰۔ وہ کھلے جن کی بہو جب سیارے سورج کے گرد حرکت کرتے ہیں اور جو ان کے موجد کیپلر کے نام سے موسوم ہیں ۲۲۲
- ۵۱۔ سورج کی ظاہری حرکت ۲۳۲
- ۵۲۔ ناقصی حرکت محسوب کرنا ۲۳۵
- ۵۳۔ ناقصی حرکت کے وہ ضابطے جو تربیوں کے ذریعہ بیان کئے گئے ہیں ۲۵۱

۵۰۔ کیپلر اور نیوٹن کے کھلے۔

وہ کھلے جن کی بہو جب



شکل (۵۱)

سیارے سورج کے گرد حرکت کرتے ہیں اور جو ان کے موجد کیپلر کے نام سے موسوم ہیں حسب ذیل ہیں۔  
(۱) ہر سیارہ کا مدار سورج کے گرد ایک قطع ناقص ہے جس کے

ایک ماسکہ پر سورج کا مرکز واقع ہے۔  
فرض کرو کہ اس (شکل ۵۱) سورج کا مرکز ہے تو کسی سیارہ کا مدار  $ABPQ$  ایک قطع ناقص ہے جس کا ایک ماسکہ اس ہے۔ سیارہ کی رفتار مستقیم نہیں ہوتی اور وہ کلیہ جس کی بموجب اس کی چال بدلتی ہے کیپلر کے دوسرے کلیہ سے ملتا ہے۔

(۲) وہ سمتی نیم قطر جو سورج کے مرکز سے سیارہ تک کھینچا جائے مساوی وقتوں میں مساوی رقبے عبور کرتا ہے۔

مثلاً قطع ناقص پر کوئی دو نقطے  $A$  و  $B$  ہو اور نیز دیگر دو نقطے  $P$  و  $Q$  تو اگر رقبہ  $ABPQ$  = رقبہ  $ABPQ$  تو سیارہ جتنے وقت میں  $AB$  کو مرسم کرے گا اتنے ہی وقت میں  $PQ$  کو مرسم کرے گا۔ اس سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ شکل بالا میں تعمیر شدہ نقطوں کے لحاظ سے سیارہ کی رفتار  $ABPQ$  مرسم کرتے وقت اس رفتار سے بڑی ہوتی ہے جو اس کی  $AB$  مرسم کرتے وقت ہے۔

کیپلر کے پہلے دو کلیوں میں صرف ایک واحد سیارہ کی حرکت سے تعلق ہوتا ہے۔ کیپلر کے تیسرے کلیہ سے دو مختلف سیاروں کی حرکت کے درمیان ایک مشہور رشتہ حاصل ہوتا ہے۔ کسی سیارے کے اوسط فاصلہ کی تعریف ہم یہ کریں گے کہ وہ سیارہ کے مدار کا نیم محور اعظم ہے اور اس کی مدت دوران یا دوری مدت کی تعریف اس وقفہ سے کی جائیگی جس میں سیارہ اپنے مدار کے پورے محیط کو طے کر لیتا ہے۔ اب کیپلر کا تیسرا کلیہ اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے:-

(۳) دو سیاروں کی دوری مدتوں کے مربع وہی نسبت

رکھتے ہیں جو سورج سے انکے اوسط فاصلوں کے مکعبوں کے درمیان ہوتی ہے۔



مثال۔ زمین اور زہرہ کی دوری مدتیں علی الترتیب ۳۶۵۱۳ دن

اور ۲۲۴۶ دن ہیں اور ان دوری مدتوں کے مربعوں میں نسبت

$$۳۶۵۱۳^۲ : ۲۲۴۶^۲ :: ۲۶۶۴۳ : ۱$$

ہے سورج سے ان کے اوسط فاصلے اور ۲۲۴۶ دن ہیں پس چونکہ  $۱ : ۲۶۶۴۳ :: ۱ : ۲۶۶۴۳$

$= ۲۶۶۴۳$  اس لیے ان دو سیاروں کے لیے کیلبر کے تیسرے قانون کی تصدیق ہو گئی۔

کیلبر کے یہ تین کھلے جو اوپر بیان ہوئے ہیں بالکل ہستیاروں کی حرکتوں کے مشابہات سے کیلبر نے اخذ کئے تھے اور ان کے اندکارنے میں ان قوتوں کا نہیں ذکر نہیں ہے جن کے تحت یہ حرکتیں جاری ہیں پچھون صدی سے زیادہ عرصہ تک یہ کھلے بغیر شرح کے محض واقعات کے طور پر قائم رہے۔ اسکے بغیر نیوٹن نے ثابت کیا کہ یہ کھلے اس عالمگیر قانون تجاذب کے لازمی نتیجے ہیں جو کائنات کے ہر مادی ذرہ کی حرکت پر جاری نظر آتا ہے۔ حرکت کے وہ تین کھلے جس پر علم حرکت کی عمارت تعمیر ہوئی ہے اور جو بالعموم نیوٹن کے کھلیوں کے طور پر معروف ہیں حسب طریقہ ذیل بیان کئے جاسکتے ہیں :-

کلیہ ۱۔ ہر جسم اپنی سکون کی حالت میں یا ایک مستقیم میں اپنی یکساں حرکت کی حالت میں رہتا ہے تا آنکہ وہ 'عاطہ قوتوں سے اپنی حالت بدلنے پر مجبور ہو جائے۔

کلیہ ۲۔ حرکت کی تبدیلی قوت عاطہ کے متناسب ہوتی ہے اور اس خط مستقیم کی سمت میں وقت ہوتی ہے جس میں یہ قوت عمل کرتی ہے۔

کلیہ ۳۔ ہر عمل کے جواب میں اس کے مساوی اور مخالف

ایک تعامل ہوتا ہے، یا کسی دو جسموں کے باہمی عمل مساوی اور مخالف سمتوں میں ہوتے ہیں۔

حرکت کی تبدیلی سے نیوٹن کی مراد معیار حرکت کی شرح تبدیلی

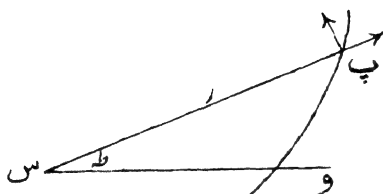
(۱۴۷) ہے یعنی متحرک جسم کی کمیت اور اس کی رفتار کی شرح تبدیلی کا حاصل ضرب جسے دوسرے لفظوں میں کمیت اور اسراع کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ کلیہ ۲ کی بناء پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ حرکت کی تبدیلی (مثلاً کسی سیارہ کی صورت میں) قوت عاملہ کے متناسب ہوتی ہے اور اس خط استقیم کی سمت میں واقع ہوتی ہے جس میں قوت عمل کرتی ہے۔

کپلر کے پہلے اور دوسرے کلیوں سے نیوٹن نے یہ ثابت کیا کہ ہر سیارہ ایک ایسی قوت کے زیر اثر حرکت کرتا ہے جس کی سمت ہمیشہ سورج کی طرف ہوتی ہے اور جو سورج سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے۔ کپلر کے تیسرے کلیہ سے نیوٹن نے ایک سیارہ کے اسراع کا مقابلہ دوسرے سیارہ کے اسراع کے ساتھ کیا اور اس سے وہ اس عالمگیر تجاذب کے قانون پر

پہنچا جس کے ساتھ اس کا نام وابستہ ہے اور جو یہ ہے کہ مادہ کا ہر ذرہ ہر دوسرے ذرہ کو ایک ایسی قوت سے کشش کرتا ہے جو انکی کمیتوں کے حاصل ضرب کے بالمراسست اور ان کے درمیانی فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔

ہم اول یہ ثابت کرینگے کہ اگر وہ سمتی نیم قطر جو ایک ثابت نقطہ سے ایک متحرک ذرہ تک کھینچا گیا ہو مساوی وقتوں میں مساوی رقبے عبور کرے تو ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کی سمت ہمیشہ اس ثابت نقطہ کی طرف ہونی چاہئے۔

اگر سمتی نیم قطر  $س پ$ ،  $ر$  ہو اور  $ط$  وہ زاویہ جو یہ سمتی نیم قطر کسی ثابت سمت  $س و$  کے ساتھ بناتا ہے تو  $س پ$  پر اور اس کے علی القوائم



شکل (۵۲)

رقبائیں علی الترتیب

$$\frac{فر}{فرت} \text{ اور } \frac{ر فرط}{فرت}$$

ہیں۔

صغیر وقت مفات کے بعد متصلہ سمتی نیم قطر پر اور اس کے علی القوائم رقبائیں

$\frac{فر}{فرت} + \frac{مفات}{فرت} \frac{ر}{فرت}$ ،  $\frac{ر فرط}{فرت} + \frac{مفات}{فرت} \frac{ر}{فرت}$  (۱۳۸) ہونگی۔ ان رقباء کو ابتدائی سمتی نیم قطر کی سمت میں تحلیل کرنے سے (جس کے ساتھ متصلہ سمتی نیم قطر زاویہ  $مفات \times فرط$  بناتا ہے) حاصل ہوتا ہے

$$\frac{فر}{فرت} + \frac{مفات}{فرت} \frac{ر}{فرت} - \frac{مفات}{فرت} \frac{ر فرط}{فرت}$$

اس لیے اگر  $س$  کی طرف اسراع -  $ف$  ہو تو

$$- ف = \frac{فرٹ^۲}{فرت} - ر \left( \frac{فرٹ}{فرت} \right)$$

اسی طرح رفتاروں کو ابتدائی سمتی نیم قطر کے عمود وار تحلیل کرنے سے اس سمت میں جزو تخلیلی حاصل ہوتا ہے

$$ر \frac{فرٹ}{فرت} + سف ت \frac{فرٹ}{فرت} - ر \left( \frac{فرٹ}{فرت} \right) + سف ت \frac{فرٹ}{فرت} \frac{فرٹ}{فرت}$$

اس لیے ابتدائی سمتی نیم قطر کے عمود وار اسراع کے لیے جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ر}{فرت} \frac{فرٹ}{فرت} - ر \left( \frac{فرٹ}{فرت} \right)$$

سمتی نیم قطر وقت سف ت میں بقدر قہ عبور کرتا ہے اس کا ڈگنا  $ر$  فرٹ ہے اور اگر یہ دو مقداریں مستقل نسبت رکھتی ہوں جیسا کہ کیلر کے دوسرے کلیہ کی بموجب ایک سیارہ کی حرکت کی صورت میں درست ہے تو

$$ر \frac{فرٹ}{فرت} = م، مستقل$$

$$اور اس لیے \frac{ر}{فرت} \frac{فرٹ}{فرت} = ۰$$

پس سمتی نیم قطر کے علی القوائم نہ کوئی اسراع ہے، نہ کوئی حرکت کی تبدیلی، اور اس لیے نیوٹن کے دوسرے کلیہ کی بموجب کوئی قوت بھی نہیں ہے۔ اس لیے پوری قوت، اس کی طرف ہے۔ اسی طرح کیلر کا دوسرا کلیہ اس امر کو ثابت کرتا ہے کہ سیارے ایک ایسی قوت کے زیر عمل حرکت کرتے ہیں جس کی سمت ہمیشہ سورج کے مرکز کی طرف رہتی ہے، ثنائیاً یہ ثابت کرنا ہے کہ اگر کوئی جسم ایک قوت کے تحت ایک مخروطی تراش میں حرکت کرے اور اس قوت کی سمت ہمیشہ اس مخروطی تراش کے ایک ماسک کی طرف ہو اور اگر یہ جسم اس طور پر حرکت کرے کہ وہ سمتی نیم قطر جو اس ماسک سے جسم تک کھینچا گیا ہو مساوی وقتوں میں مساوی

رستے عبور کرے تو قوت اس ماسکی سمتی نیم قطر کے مربع کے بالعکس متناسب ہونی چاہئے۔

اس ماسکے کے حوالے سے مخروطی کی مساوات ہے

$$r = l \setminus (1 + \text{زجم طہ})$$

(۱۴۹) جہاں  $l$  نیم وتر خاص ہے، 'ز خروج المرکز' اور  $\text{طہ}$  وہ زاویہ جو سمتی نیم قطر (ر) اس خط کے ساتھ بناتا ہے جو خفیض کو ماسکے سے ملاتا ہے (دفعہ ۵۲)۔

اس طرح ہمیں حسب ذیل تین مساواتیں ملتی ہیں

$$r = l \setminus (1 + \text{زجم طہ}) \quad (۱)$$

$$\frac{r^2}{\text{فرت}^2} - r \left( \frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} \right) = - \text{ف} \quad (۲)$$

$$\text{اور} \quad \frac{r^2}{\text{فرت}^2} = \text{م} \quad (۳)$$

ان مساواتوں سے  $\text{ف}$  یعنی سورج کی طرف اسراع معلوم کیا جاسکتا ہے چنانچہ (۱) کو تفرق کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{r^2}{\text{فرت}^2} = \frac{l \text{ زجب طہ}}{\text{فرت}^2} = \frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} = \frac{\text{زجب طہ}}{l} \quad \text{اور} \quad \frac{r^2}{\text{فرت}^2} = \frac{\text{م}}{l} = \frac{\text{زجب طہ}}{\text{فرت}^2}$$

$$\text{اور} \quad \frac{r^2}{\text{فرت}^2} = \frac{\text{م}}{l} = \frac{\text{زجب طہ}}{\text{فرت}^2}$$

$$\text{نیز} \quad r \left( \frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} \right) = \frac{\text{م}}{r}$$

$$\text{اور اس لیے} \quad \frac{r^2}{\text{فرت}^2} - r \left( \frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} \right)$$

$$= \frac{\text{م}}{r} = \left\{ \frac{\text{زجب طہ}}{l} - \frac{1}{r} \right\}$$

$$= \frac{\text{م}}{r} = \left\{ \frac{\text{زجب طہ}}{l} - \frac{1}{r} \right\} = - \frac{\text{م}}{r}$$

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اسراع اور اس لیے قوت مدار کے ہر نقطہ پر  
ماسکہ سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے۔ یہ نتیجہ درست ہے خواہ  
نہ کی قیمت کچھ ہی ہو مدار ایک قطع ناقص ہو یا ایک قطع زائد یا ایک قطع  
مکائی۔

اگر ہم اسراع کو  $r$  سے تعبیر کریں جہاں  $m$ ، اکائی فاصلہ پر سورج  
کی کشش کی وجہ سے اسراع ہے تو مندرجہ بالا ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

$m^2 = \frac{1}{r}$  ..... (۴)  
اب ہم کپلر کے تیسرے کلیے سے یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ مستقل  
مہ سب سیاروں کے لیے ایک ہی ہے۔ کیونکہ  $m$ ، وقت کی اکائی میں  
مترسمہ قیہ کا ڈگنا ہے اور اس لیے اگر مدت دوران  $d$  ہو تو کپلر کے دوسرے  
کلیے سے ہمیں حاصل ہونا چاہئے

$$d^3 = \frac{1}{m^2} \text{ یا } d^3 = \frac{1}{m^2}$$

لیکن  $L = \frac{1}{m^2}$ ۔ اس لیے (۴) کے ذریعہ

$$d^3 = \frac{1}{m^2} \text{ یا } d^3 = \frac{1}{m^2}$$

(۱۵۰) لیکن کپلر کے تیسرے کلیے کی ہوجب  $d^3 = \frac{1}{m^2}$  سب سیاروں کے لیے  
وہی ہے اور اس لیے  $m$ ، پورے نظام شمسی میں مستقل ہے۔  
اگر کسی سیارے کے مرکز سے طریق الشمس پر عمود کھینچا جائے تو  
سورج کے مرکز اور  $r$  میں سے گزرنے والے ایک خط کو اس عمود سے  
ملنے کے لیے طریق الشمس کے مستوی میں مثبت سمت میں جس قدر زاویہ  
سے گھمانا پڑتا ہے اس کو سیارہ کا شمسی مرکزی طول بلد کہتے ہیں سورج  
کے ارض مرکزی طول بلد میں اگر  $180^\circ$  جمع کئے جائیں تو زمین کا شمسی مرکزی  
طول بلد حاصل ہوتا ہے۔

دو سیاروں کی اقترانی مدت سے مراد ان دو متصلہ موقعوں کے  
درمیان اوسط وقفہ ہے جن پر یہ سیارے اقتران میں ہوتے ہیں یعنی  
ایک ہی شمس مرکزی طول بلد رکھتے ہیں۔ اگر وہ ایک ہی مستوی میں

دائری مداروں پر یکساں رفتار سے حرکت کریں اور اگر ان کے دورِ علی الترتیب  
د ہوں اور وقت ت پر ان کے شمس مرکزی طول بلد ل ہوں تو  

$$ل = \pi r \times \frac{ت}{د} + ل$$

جہاں ل اور ل وقت ت = ۰ پر طول بلد کو تعبیر کرتے ہیں۔  
 فرض کرو کہ اقترانی مدت لا ہے اور ت وہ وقت ہے جبکہ ل = ۰۔  
 تو ت + لا وہ وقت ہوگا جبکہ یہ سیارے پھر اقتران میں ہوں گے اور  
 اُس وقت ل = ل =  $\pi r$  (اگر د < د)۔ پس مساواتیں حاصل ہوتی ہیں  

$$\pi r = \pi r - د \times \frac{ت}{د} + ل - ل$$

اس لیے تفریق کرنے سے  

$$\pi r = \pi r (ت + لا) - د \times \frac{ت}{د} + ل - ل$$

لا =  $\frac{د \times د}{د - د}$   
 اگر ان میں سے ایک سیارہ زمین ہو، سال وقت کی اکائی، زمین کا  
 اوسط فاصلہ طول کی اکائی، اور لا دوسرے سیارہ کا اوسط فاصلہ سورج سے  
 تو کیپلر کے تیسرے کلیئے سے کسی بیرونی سیارے کے لیے حاصل ہوتا ہے  

$$لا = \frac{د}{د - د} \times (د - د)$$

اور کسی اندرونی سیارے کے لیے  

$$لا = \frac{د}{د - د} \times (د - د)$$

مثال ۱۔ یہ فرض کر کے کہ زمین کا اوسط فاصلہ سورج سے ۹۲،۹  
 (اکائی..... انیل) ہے اور زمین کے مدار کا خروج مرکز ۱۶۸۔۱ ہے اُس مربع کا

لے بیرونی سیارہ سے مراد وہ سیارہ ہے جس کا مدار زمین کے مدار کے باہر ہے اور  
 اندرونی سیارہ سے مراد وہ سیارہ جس کا مدار زمین کے مدار کے اندر واقع ہے۔ مقرر جم

ضلع معلوم کرو جس کا رقبہ اس رقبہ کے مساوی ہو جو زمین کا سمتی نیم قطر روزانہ عبور کرتا ہے۔

نوٹ :- ایک سال ہمیشہ ۳۶۵،۲۵ اوسط شمسی ایام کا لیا جاسکتا ہے جب تک کہ اس کے خلاف نہ کہا گیا ہو۔

مثال ۲۔ اگر ضعیض اور آج پر ایک سیارہ کی رفتاریں علی الترتیب (۱۵۱) م، م ہوں اور اگر اسکے مدار کا خروج المرکز زہو تو ثابت کرو کہ

(۱-ز) = ۱۰ = (۱+ز) م  
مثال ۳۔ ثابت کرو کہ کسی آن ایک سیارہ کی رفتار دو اجزائے یکساں میں تحلیل کی جاسکتی ہے ایک م | جو سمتی نیم قطر پر عمود ہو اور دوسرے زم | جو مدار کے محور اعظم پر عمود ہو۔

مثال ۴۔ کپلر کے دوسرے اور تیسرے کلیوں سے ثابت کرو کہ نظام شمسی کے کوئی دو سیارے ایک دے ہوئے وقت میں جو رقبے عبور کرتے ہیں ان کی نسبت ان کے وتر خاص کے جذر المربعوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔  
مثال ۵۔ مشتری کا اوسط فاصلہ سورج سے ۵،۲۰۳ ہے جبکہ طول کی اکائی سورج سے زمین کا اوسط فاصلہ ہو۔ مشتری کی مدت دوران ۱۱،۸ سال اور عطارد کی مدت دوران ۰،۲۴ سال ہے۔ ثابت کرو کہ سورج سے عطارد کا فاصلہ ۰،۳۸ ہے۔

مثال ۶۔ مریخ کے مدار کا خروج المرکز ۰،۰۹۳۳ ہے اور سورج سے اس کا اوسط فاصلہ سورج سے زمین کے فاصلہ کا ۰،۵۲۳۴ اگنا ہے۔ یہ مان کر کہ زمین کا فاصلہ سورج سے ۹۲۹،۰۰۰ میل ہے اور اس کے مدار کا خروج المرکز نظر انداز کیا جاسکتا ہے زمین سے مریخ کے بڑے سے بڑے اور کم سے کم ممکن فاصلوں کی تعیین کرو۔

مثال ۷۔ اگر ایک سیارہ کی مدت دوران ۵ ہو اور اس کے نیم محور اعظم کا طول ۱ تو ثابت کرو کہ نیم محور اعظم میں ایک چھوٹی تبدیلی سف | کی وجہ سے مدت دوران میں تبدیلی ۵۳ سف | پیدا ہوگی۔



**مثال ۸۔** ثابت کرو کہ کسی سیارہ کی حرکت میں جو ایک ناقصی مدار پر سورج کے گرد حسب قانون قدرت حرکت کرتا ہے غیر مقبوضہ ماسکے کے گرد زاویائی رفتار ایسے بدلتی ہے جسے سمتی نیم قطر اور ماس کے درمیان زاویہ کی جیب کا مربع۔  
فرض کرو کہ قطع ناقص کی ایک چھوٹی قوس فرس ہے جو سورج سے رفاصلہ پر اور غیر مقبوضہ ماسکے سے رفاصلہ پر ہے۔ فرض کرو کہ فرس پر کے ماس پر ماسکو سے عمود 'ع' ہیں۔ فرض کرو کہ طہ وہ زاویہ ہے جو ایک ماسکی نیم قطر ماس کے ساتھ بناتا ہے۔

کیلر کے دوسرے کلیئے سے فوراً یہ مستنبط ہوتا ہے کہ 'ع' سیارہ کی خطی رفتار کے باعکس متناسب ہے اور اس لیے فرس مرتسم کرنے کا وقت ایسے بدلتا ہے جیسے 'ع' فرس۔ وہ زاویہ جو غیر مقبوضہ ماسکے کے گرد مرتسم ہوتا ہے فرس جب طہ اڑے اور اس لیے اس غیر مقبوضہ ماسکے کے گرد زاویائی رفتار

فرس جب طہ اڑے فرس = جب طہ اڑے = جب طہ اڑے = جب طہ اڑے  
لیکن قطع ناقص کی خاصیت کی رو سے 'ع' مستقل ہوتا ہے، اس لیے مسئلہ ثابت ہو گیا

**مثال ۹۔** ایک سیارہ سورج کے گرد ایک ناقصی مدار پر حرکت کرتا ہے اور سورج ایک ماسکے پر ہے۔ اگر مدار کے خروج المرکز کا مربع نظر انداز کیا جاسکے تو ثابت کرو کہ سیارہ کی زاویائی رفتار دوسرے ماسکے کے گرد یکساں ہوگی۔

**مثال ۱۰۔** تختہ ذیل کی مدد سے جو بھری جتنی بابینہ سنہ ۱۸۹۹ء سے اخذ کیا گیا ہے ثابت کرو کہ زمین کے مدار کا خروج المرکز تقریباً ۱۶۸-۰.۵ ہے۔

(۱۵۲)

سورج کا طول بلد

۲۸۱ ۵ ۳۰۶۶

یکم جنوری

۲۸۲ ۶ ۳۹۶۷

۲

۹۹ ۳۲ ۱۹۵۱

یکم جولائی

[Coll. Exam.] ۲۹ ۹۰۰ ۲۹۶۶

۲

**مثال ۱۱۔** اگر ایک صغیر سیارہ کے مدار کو طریق الشمس کے مستوی میں ایک دائرہ تسلیم کیا جائے تو ثابت کرو کہ سیارہ اور سورج کے طول بلد کے فرق کے

دو مشاہدات مع گذرے ہوئے وقت کے علم کے نصف قطر متعین کرنے کے لیے کافی ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ ایسے تین مشاہدات مدار کی تعین کریں گے اگر اُسے قطع مکانی مان لیا جائے۔

طول بلد کے فرق کے ایک واحد مشاہدہ سے یہ معلوم ہوگا کہ سیارہ ایک معلوم خط مستقیم پر واقع ہونا چاہئے یعنی اُس خط پر جو زمین کے مرکز میں سے طریق الشمس کے اُس نقطہ تک کھینچا گیا ہو جو سورج سے مشاہدہ کردہ فاصلہ پر واقع ہے۔ جب ایسے دو خطوط مستقیم معلوم ہو جائیں تو ایک دائرہ جس کا مرکز سورج پر ہوا ان میں سے ہر خط کو دو نقطوں میں قطع کرے گا۔ اگر ایک خط مستقیم پر کا ایک نقطہ تقاطع اور دوسرے خط مستقیم پر کا ایک نقطہ تقاطع سورج پر وہ زاویہ بنائیں جس سے اُس نصف قطر کیلے وقت کا مشاہدہ کردہ وقفہ حاصل ہو جائے تو مسئلہ حل ہو جاتا ہے۔ پس آزمائش سے اس طریقہ پر نصف قطر کی تعین ہوگی۔ نصف قطر کی مساوات بھی معلوم کیجا سکتی ہے لیکن یہ بھی صرف آزمائش سے حل کی جا سکتی ہے۔

**مثال ۱۲۔** ثابت کرو کہ ایک مدت اقتراں میں کوئی سفلی سیارہ نصف النہار کو اتنے ہی مرتبہ عبور کرتا ہے جتنی مرتبہ سورج لیکن کوئی علوی سیارہ ایک مرتبہ زائد عبور کرے گا۔

**مثال ۱۳۔** مشتری کے چوتھے قمر کا مداری دور

$$\text{دن } 16 \quad \text{گھنٹے } 5 \quad \text{منٹ } 69 \quad \text{ثانئے } 552 = 53552 \times 16 \text{ دن}$$

ہے اور پانچویں قمر کا دور ۱۱ گھنٹے ۵۷ منٹ ۲۷۷ ثانئے = ۶۹۸۲۳۶ دن ہے۔ کپلر کے تیسرے کلیئہ کی مدد سے مشتری سے ان دو قمروں کے اوسط فاصلوں کی نسبت معلوم کرو۔

**مثال ۱۴۔** یہ مان کر کے مریخ کے قمر دیموس (Deimos) اور فوبوس (Phobos) دُری مداروں میں گردش کرتے ہیں اور یہ کہ ۲۳ ستمبر ۱۹۰۹ء کے تقابل (Opposition) پر مریخ کے مرکز سے دیموس کا بڑے سے بڑا مشاہدہ کردہ فاصلہ ۱۱۲۳۱ تھا کپلر کے تیسرے کلیئہ سے ثابت کرو کہ فوبوس کا بڑے سے بڑا ظاہری

فاصلہ ۳۳۲۲ ہے جبکہ یہ دیا گیا ہو کہ فووس کی مدت دوران ۷ گھنٹے ۳۹ منٹ ۱۳،۸۵ ثانیے ہے اور دیوس کی ۳۰ گھنٹے ۱۷ منٹ ۵۴،۸۶ ثانیے۔

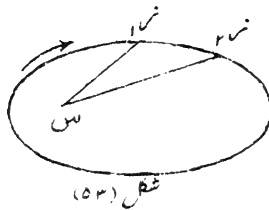
## ۵۱۔ سورج کی ظاہری حرکت۔

سورج کے گرد زمین کی گردش سے سورج کے ظاہری مقام اور اس کی ظاہری جسامت دونوں میں تبدیلیاں ہوتی ہیں جبکہ سورج کو زمین سے دیکھا جاتا ہے۔ اب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ وہ منظر جس سے ہمیں اس باب میں واسطہ ہے بالکل ٹھیک ٹھیک پیدا کیا جاسکتا ہے اگر زمین فی الواقع ساکن ہوئی اور سورج زمین کے گرد ایک ایسے مدار پر حرکت کرتا جو کیپلر کے کلموں کے مطابق ہوتا اور شکل اور ناپ میں سورج کے گرد زمین کے مدار کے مماثل ہوتا۔ فرض کرو کہ  $ms$  (شکل ۵۳) سورج ہے اور  $ms'$  اور  $ms''$  زمین کے دو محل ہیں۔  $ms$  سے سورج سمت  $ms'$  میں نظر آتا ہے اور اس کا فاصلہ  $ms'$  میں ہے۔

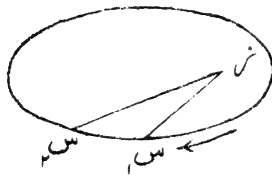
شکل ۵۴ میں  $ms$  سے  $ms'$ ،  $ms''$  کے متوازی اور مساوی کھینچو۔ اسی طرح فرض کرو کہ  $ms'$ ،  $ms''$  کے مساوی اور متوازی ہے۔ اگر اسے نقطوں  $ms'$ ،  $ms''$  وغیرہ کے دوسرے زوجوں کے لیے دہرایا جائے تو وہ قطع ناقص جو  $ms$ ،  $ms'$ ،  $ms''$  سے مرسم ہوگا شکل اور ناپ میں بالکل اس قطع ناقص کے مماثل ہوگا جو  $ms'$ ،  $ms''$  وغیرہ سے مرسم ہوتا ہے۔ ثانی الذکر قطع ناقص سورج کے گرد زمین کا حقیقی راستہ ہے اور اول الذکر وہ راستہ ہے جسے سورج زمین کے گرد مرسم کرتا نظر آتا ہے۔ ہر آن سورج کی ظاہری سمت اور اس کا فاصلہ وہی ہوتے ہیں خواہ ہم سمجھیں کہ زمین ثابت سورج کے گرد گھوم رہی ہے (شکل ۵۳) یا یہ سمجھیں کہ سورج ثابت زمین کے گرد گھوم رہا ہے (شکل ۵۴)۔

اگر سورج کا نصف قطر  $1$  ہو اور زمین سے سورج کے مرکز کا فاصلہ  $r$  ہو (یہاں  $ms$  سورج کے مرکز کو ایک نقطہ تصور کریں) تو سورج کے

ظاہری نیم قطر کی زاویہ  
قیمت جبکہ زمین سے دیکھا  
جائے جب  $\frac{1}{2}$  رہے۔



شکل (۵۳)



شکل (۵۴)

یہ زاویہ چونکہ چھوٹا ہے  
اس لیے ہم اس کی قیمت  
قوس کے ثانیوں میں کافی  
تقرب کے طور پر  
 $\frac{1}{2}$  =  $\frac{1}{2}$  رجب آئے سکتے  
ہیں۔ اس طرح ہم دیکھتے  
ہیں کہ  $\frac{1}{2}$  کے بالعکس  
بدلتا ہے، اس لیے اگر سال

کی دو مختلف تاریخوں پر  $\frac{1}{2}$  کو مشاہدہ سے معلوم کیا جائے تو سورج کے  
اضافی فاصلے ان تاریخوں پر فوراً حاصل ہوتے ہیں۔

مثال — بتایں ۳ جنوری ۱۹۰۶ء سورج کا زاویہ نیم قطر  $۵۸^{\circ} ۱۶'$  ہے  
ہے اس وقت سورج زمین سے کم سے کم فاصلہ پر ہے۔ بتایں ۴ جولائی ۱۹۰۶ء  
سورج کا زاویہ نیم قطر  $۵۵^{\circ} ۳۲'$  ہے اس وقت سورج زمین سے زیادہ سے  
زیادہ فاصلہ پر ہے۔ ان مفروضات سے ثابت کرو کہ زمین کے مدار کا خروج المکرز  
۱۹۰۶ء - ۱۹۰۷ء ہے۔

## ۵۲۔ ناقصی حرکت محسوب کرنا۔

(۱۵۴)

فرض کرو کہ ف زمین کا مرکز ہے اور و پ و قطع ناقص ہے  
جس کا ماسکہ ف ہے اور جس میں سورج اپنی سالانہ گردش کی تکمیل کرتا ہو  
نظر آتا ہے۔ اس ناقص کا محور اعظم و و ہے اور اس کا مرکز ج ہے۔  
اور اس کا نصف قطر ج و  $\frac{1}{4}$  و و = ۱ - خطی پ ہ و و پر



سورج و سے پ تک حرکت کرتا ہے اور اگر مدار کی مدت دوران ت ہو تو

ت : دتا :: رقبہ و ف پ : ناقص کا رقبہ  
اگر ہم ن سے اوسط حرکت کو تغیر کریں یعنی اگر ن اُس زاویہ کی اوسط قیمت کا  
دائری ناپ ہو جو کائی وقت میں سمتی نیم قطر سے عبور ہوتا ہے تو  $n = 2\pi$  ات (۱۵۵)  
اور چونکہ ناقص کا رقبہ  $\pi$  اب ہے اس لیے

$$ن ت = ۲ \times \text{رقبہ و ف پ} \quad \text{اب}$$

زاویہ ن ت بہت اہمیت رکھتا ہے اسے ہم اوسط بے قاعدگی  
(Mean anomaly) کہیں گے اور اس کو ط سے تغیر کریں گے۔

قطع ناقص کے خواص سے پ ہ ق ہ = ب ا ہ  
رقبہ و ہ پ

$$= ب \times \text{و ہ ق ا} = ب (و ج ق - ہ ج ق) \quad \text{ا}$$

$$= \frac{۱}{۴} \text{اب} (۶ - \text{جب ع جم ع})$$

نیز رقبہ ف ہ پ

$$= ب \times ق ہ \times ف ہ = \frac{۱}{۴} \text{اب} (۶ - \text{جب ع جم ع})$$

اس لیے و ف پ = و ہ پ + ف ہ پ =  $\frac{۱}{۴} \text{اب} (۶ - \text{جب ع})$

اور آخر الامر ط = ۶ - جب ع ..... (۱)

پس ط ع کی رقوم میں بیان ہو چکا اور اب ہم و کو ع کی رقوم میں  
اس طرح بیان کر سکتے ہیں :-

قطع ناقص سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{رجم د} = \text{جم ع} - \text{و ز}$$

$$\text{رجب و} = ب \text{ جب ع}$$

اس لیے مریخ لینے اور جمع کرنے سے

$$ر = \text{و} (۱ - \text{رجم ع}) \dots \dots \dots (۲)$$

$$۲ \text{ رجب ا} = \frac{۱}{۴} \text{و} (۱ - \text{جم و}) = \text{و} (۱ - \text{رجم ع} - \text{جم ع} + \text{و ز})$$

$$\begin{aligned} 1 &= (1+z)(1-z) \text{ (جم ۶)} \\ 2 \text{ جم } \frac{1}{4} &= 1 + (1+z) = (1-z)(1+z) + 1 = (1+z)(1+z) \\ &= (1+z)(1-z) \text{ (جم ۶)} \end{aligned}$$

اور بالآخر

$$\text{مس } \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \text{ مس } \frac{1}{4} \dots \dots \dots (3)$$

\* [لگرنج کے مسئلہ کا اطلاق - اگر ہم (۱) اور (۳) سے

و کو سا قضا کر سکیں تو ط اور و کے درمیان ایک رشتہ  
ملاحظا ہے لیکن یہ سادتاں ماورائی نوعیت کی ہیں اور اس لیے  
محدود درجہوں میں ایسا اسقاط ناممکن ہے۔ تاہم لگرنج کے مسئلہ کی  
مدد سے ہم و کو ط کی رقوم میں ز کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ کے ذریعہ  
بیان کر سکتے ہیں۔ اس سلسلہ سے ط اور ز کی دی ہوئی قیمتوں کے لیے  
ہم و کو کسی مطلوبہ درجہ صحت تک محسوب کر سکیں گے۔

لگرنج کا مسئلہ یہ ہے :- اگر یہ دیا گیا ہو کہ

$$y = 1 + \text{ما فہ } (y) \dots \dots \dots (1)$$

جس میں لا اور ما فہ متغیر ہیں اور اگر فا (y) 'ی کا کوئی تفاعل ہو تو

(۱۵۶)

$$\text{فا } (y) = \text{فا } (لا) + \text{ما فہ } (لا) \text{ فا } (لا) + \frac{\text{ما}^2}{2 \times 1} \text{ فر } [ \text{فہ } (لا) \text{ فا } (لا) ]$$

$$+ \dots + \frac{\text{ما}^n}{n \times 2 \times 1} \text{ فر } [ \text{فہ } (لا) \text{ فا } (لا) ] + \dots + (1)$$

جس میں فا (لا) حسب معمول فر [فا (لا)] کو تعبیر کرتا ہے۔

اس کا اطلاق زیر بحث صورت پر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم  
ی کی بجائے 'و' لا کی بجائے ط' ما کی بجائے ز لکھیں اور اگر فہ (و) = جب و

رکھیں تو مساوات (۱) مساوات (۱) کے مماثل ہو جاتی ہے۔ علاوہ ازیں اگر ہم (۳) کو شکل و = فا (۶) میں لکھیں تو مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$و = فا (۶) = فا (ط) + ز جب ط فا (ط) + \frac{ز^۲}{۲} \frac{فر}{زط} \{ جب ط فا (ط) \}$$

$$+ \frac{ز^۳}{۳} \frac{فر}{زط^۲} \{ جب ط فا (ط) \} + \dots (ب)$$

لیکن مساوات (۳) سے اُس شہور مثلثی پھیلاؤ کے ذریعہ جو صفحہ ۲۳۵ میں ثابت کیا گیا ہے حاصل ہوتا ہے

$$و = فا (۶) = ۲ + ۶ \{ ج جب ۶ + \frac{۱}{۲} ج جب ۲ + ۶۲ + \frac{۱}{۳} ج جب ۳ + \dots \}$$

جہاں  $ج = \{ ۱ - \sqrt{۱ - ز^۲} \}$  - اس لیے

$$فا (ط) = ۲ + ط \{ ج جب ط + \frac{۱}{۲} ج جب ۲ + ط^۲ + \frac{۱}{۳} ج جب ۳ + \dots \}$$

اور اس لیے

فا (ط) =  $۲ \times ۱ \{ ج جب ط + ج جب ۲ + ط^۲ + ج جب ۳ + \dots \}$   
پس مساوات (ب) کی بائیں جانب کی سب رقمیں محسوب کی جاسکتی ہیں اور اس طرح و صحت کے کسی مطلوبہ درجہ تک حاصل کیا جاسکتا ہے۔  
دیکھو ضابطہ (۷) صفحہ ۲۳۷ [

**کپیلر کا مسئلہ۔** مساوات (۱) کے حل کرنے کو یعنی ۷ کے

متعین کرنے کو جبکہ ط دیا گیا ہو کپیلر کا مسئلہ کہتے ہیں۔ فرض کرو کہ ۷ کی ایک تقریبی قیمت ۷ ہے جو تخمین سے یا کسی اور ذریعہ سے حاصل ہوئی ہے اور فرض کرو کہ

۷ - ز جب ۷ = ط  
اگر ۷ کی اصلی قیمت ۷ + مف ۷ ہو تو (۱) میں اندراج کرنے سے



تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے

$$(٢) \dots\dots\dots \frac{b - b}{1 - زجم} = \text{مف} =$$

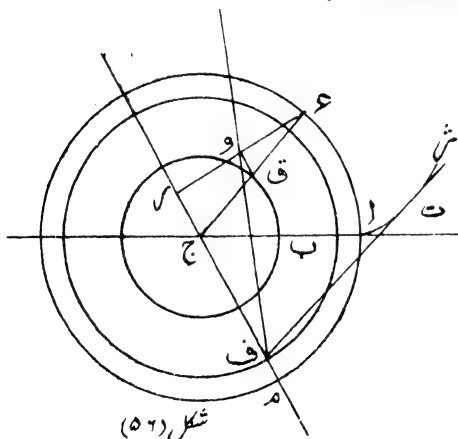
کاگوئی نے یہ ثابت کیا ہے کہ تقرب کے اس طریقہ میں زیادہ حاصل کی جاسکتی ہے اگر ضابطہ (۴) کی بجائے ضابطہ

$$\frac{.b - b}{\{(.b - b) \frac{1}{4} + .6\} \sqrt{z - 1}} = \text{مفاج}$$

استعمال کیا جائے۔

جیسا کہ اڈیمس (Adams) نے بیان کیا ہے یہ دونوں طریقے دراصل نیوٹن کے مجوزہ ہیں۔

کپلر کے مسئلہ کو ترسیبی طریقوں کی مدد سے حل کرنے کے لیے متعدد عمل استعمال کئے جا چکے ہیں۔ ان میں سے ایک ترسیبی حل یہاں درج کیا جاتا ہے جس کے لیے میں ڈاکٹر رامبو (Dr. Rambaut) کا ممنون ہوں۔



تین ہم مرکز دائرے  
(شکل ۵۶) کھینچو جنکے  
نصف قطر علی الترتیب  
ج ب = ب ج  
ج ف = ف ز اور  
ج ح = ح ہوں۔  
ان دائروں کو  
علی الترتیب ضعیف  
دائرہ، ماسکی دائرہ،  
اور کبیرہ دائرہ کے

نام سے موسوم کیا جائے گا۔ کبیر دائرہ کے کسی نقطہ  $\alpha$  سے ابتدا کر کے اس کا دریچہ  $\alpha$  اختتام پھینچو۔ فرض کرو کہ ج  $\alpha$  وہ سمت ہے جہاں سے اوسط بے قاعدگی  $\alpha$  (یعنی زاویہ  $\alpha$  ج  $\alpha$ ) کی پیمائش کی جاتی ہے۔ اب  $\alpha$  کے جواب میں  $\alpha$ ،  $\alpha$  کی قیمتیں معلوم کی جاسکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ج  $\alpha$  ماسکی دائرہ کو  $\alpha$  پر قطع کرتا ہے۔  $\alpha$  دریچہ کا عماد کبیر دائرہ کا تماس ہے۔ فرض کرو کہ اس کا نقطہ تماس  $\alpha$  ہے۔ تو ج  $\alpha$  جو صغیر دائرہ کو  $\alpha$  پر قطع کرتا ہے  $\alpha$  ت کے متوازی ہے۔ دریچہ کی لازمی خاصیت کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ  $\alpha$  (یعنی  $\alpha$ ) لیکن

$\alpha$  ت = ج ف جب ف ج  $\alpha$  =  $\alpha$  ز جب ف ج  $\alpha$   
ایسے شکل جو سادہ شکل  
 $\alpha$  (یعنی  $\alpha$ ) ز جب ف ج  $\alpha$  =  $\alpha$  (زاویہ ف ج  $\alpha$  - زاویہ  $\alpha$  ج ف)

$\alpha$  =  $\alpha$  - ز جب  $\alpha$   
افتیاد کرتا ہے اگر ہم زاویہ ف ج  $\alpha$  =  $\alpha$  رکھیں۔  
اگر  $\alpha$  سے ج ف پر نمود  $\alpha$  اور ق سے  $\alpha$  پر نمود  
ق و کھینچے جائیں تو

ف و ج م ف و = ج و ج م - ج ف =  $\alpha$  ج م -  $\alpha$  ز  
ف و ج م ف و = ج ق جب  $\alpha$  =  $\alpha$  ج م  
پس جب مذکورہ بالا تین دائرے اور دریچہ  $\alpha$  اختتام پھینچ لے جائیں تو پکیر کے مسئلہ کے حل کو اختصاراً اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے:-  
کبیر دائرہ پر ایک نقطہ  $\alpha$  ایسا لو کہ زاویہ  $\alpha$  ج م =  $\alpha$  - نقطہ ف سے جو ج م اور ماسکی دائرہ کا نقطہ تقاطع ہے دریچہ کا تماس ف ت کھینچو اور ج میں سے ج ق  $\alpha$  ف ت کے متوازی کھینچو جو کبیر اور صغیر دائروں کو علی الترتیب  $\alpha$  اور ق پر قطع کرے۔

تب زاویہ  $\alpha$  ج م =  $\alpha$ ، زاویہ م ف و =  $\alpha$

زاویہ ج = ۶ = ۶۰° ف = ۱۰ = ۱۰°

اور مسئلہ حل ہو جاتا ہے۔

[باؤشینگر (Bauschinger) کی جدولیں اور اسی قسم کی دوسری جدولیں معلوم کرنے کے سوال کو حل کرنے میں بڑی مدد دیتی ہیں جبکہ ط اور ز دے گئے ہوں۔ ہم ان کے استعمال کی توضیح حسب ذیل سوال سے کرتے ہیں۔

ہیلی کے ڈیڈار تارے (Comet) کے مدار کے لئے حسب ذیل مفروضہ عناصر دے گئے ہیں :-

خروج المکرز ز = ۳۳° ۱۹۶۱

حقیض سے گزرنے کا وقت = ۲۴ مئی ۱۹۱۰ء

دور = ۵ = ۶۱۰۸۵ سال

اس تارے کی خروج المکرزی اور اصلی بے قاعدگیاں بتایں ۲۴ مئی ۱۹۱۰ء معلوم کرو۔

اوسط حرکت = ۲۶۰\۵ اور چونکہ حقیض پر پہنچنے کے لیے ابھی دس سال باقی ہیں اس لیے

$$p = \frac{60 \times 60 \times 360 \times 10}{466085} = 1403358$$

$$55818^{\circ} 4^{\circ} =$$

دوہرے داخلہ کی باؤشینگر کی جدولیں دیلوں  $p = 14033^{\circ}$  اور  $z = 33^{\circ}$  کے لیے دیکھنے سے خروج المکرزی بے قاعدگی کی تقریبی قیمت  $10133^{\circ}$  حاصل ہوتی ہے۔

(۱۵۹)

پھر ضابطہ (۴) سے ہم مف ج کو حسب طریقہ ذیل محسوب کرتے ہیں:-

$$\text{لی جب ج} = ۹۵۹۹۱۴۹۸۴ = \text{لی جم ج} = ۹۵۹۲۹۲۱۴$$

$$\text{لی ز} = ۹۵۹۸۳۰۵۴۷ = \text{لی ز} = ۹۵۹۸۳۰۵$$

$$\text{لوک ق م آ} = ۵۵۳۱۴۴۲۵۱ = \text{لی ز جم ج} = ۹۵۹۲۷۵۱۹$$

$$\text{لوک ز جب ج} = ۵۵۲۸۸۹۷۸۲ = \text{لی ز جم ج} = ۱۶۱۸۸۴$$

$$\text{ز جب ج} = ۱۹۴۵۲۶۱۲ = \text{لوک (ج - ب)} = ۲۱۲۶۰۰۷$$

$$۶۵۲۲۵۴ = \text{لوک (۱ - ز جم ج)} = ۵۰۷۴۹۶۷$$

$$\text{ج} = ۰.۱۸۱۰۱ = \text{لوک مف ج} = ۲۱۸۵۱۱$$

$$\text{ب} = ۵۳۱۸۱۵۴ = \text{مف ج} = ۱۵۳۱۵$$

$$\text{ب} = ۵۵۵۸۱۸۴ = ۳۳۱۵۲۰$$

$$\text{ج} = ۰.۱۸۱۰۱ = ۰.۱۰۰$$

$$\text{ب - ب} = ۱۸۲۵۰ = \text{ج} = ۳۳۱۵۲۰ \div ۰.۱ = ۳۳۱۵۲۰$$

یہ قیمت ء کی اصلی قیمت سے بہت زیادہ قریب ہونی چاہئے۔  
اس کی تصدیق کے لیے ہم دوسرے تقرب کا عمل کرتے ہیں۔

$$\text{لی جب ج} = ۹۵۹۹۱۴۳۳۸$$

$$\text{لی ز} = ۹۵۹۸۳۰۵۴۷$$

$$\text{لوک ق م آ} = ۵۵۳۱۴۴۲۵۱$$

$$\text{لوک ز جب ج} = ۵۵۲۸۸۹۱۴۶$$

$$\text{ز جب ج} = ۱۹۴۴۹۷۳۱$$

$$۶۵۲۲۵۴ = ۳۷۵۳۱$$

$$\text{ج} = ۰.۱۸۱۰۱ = ۳۳۱۵۲۰$$

$$\text{ب} = ۵۵۵۸۱۸۴ = ۵۵۵۸۰۱۸$$

$$\text{ب} = ۵۵۵۸۰۱۸$$

$$\text{ط} - \text{ط} = ۰.۴$$

یہ نفیف فرق بالکل قابل نظر انداز ہے لیکن اگر اس کا لحاظ کیا جائے تو ہم دیکھتے ہیں کہ ۱- زجم ۶ اور ۱- زجم ۶ میں جسے محسوب کیا جا چکا ہے قابل قدر فرق نہیں ہوگا اور ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{مف} ۶ = \frac{\text{ط} - \text{ط}}{۱ - \text{زجم} ۶} = \frac{\text{ط} - \text{ط}}{۱ - \text{زجم} ۶} = \frac{۰.۴}{۱.۲} = ۰.۳۳$$

اور اس لیے بالآخر  $۳۳۱۲.۲۰.۹۰۱ = ۶$  خروج المکرزی بے قاعدگی ۶ معلوم کر لینے کے بعد ہم اسے مساوات (۳) میں و معلوم کرنے کے لیے درج کرتے ہیں۔ اس مقصد کے لیے مساوات (۳) کو شکل

$$\text{مس} \frac{۱}{۶} = \text{مس} \left( \frac{۱}{۶} + \pi \frac{۱}{۶} \right) \text{مس} \frac{۱}{۶}$$

میں لکھ لینا سہولت کا باعث ہے جہاں جب  $ف = ز$  - اگرچہ باوجود تکرر کی جدولیں مطلوبہ قیمت کو ایک اچھے تقرب تک فوراً حاصل کر لینے کے لیے مفید ہیں تاہم وہ ناگزیر نہیں ہیں۔ تریبی طریقوں میں سے کسی ایک سے  $۶$  کی تعیین اس کی اصلی قیمت سے تین یا چار درجوں کے اندر فوراً ہو جائے گی۔ پھر ہم چار مقامی لوکاریتوں کی مدد سے ایک قیمت اتنی صحت کے ساتھ حاصل کر سکتے ہیں جتنی جدولوں سے حاصل کرنا ممکن ہے۔ مثلاً اگر ہم نے تریبی عمل سے  $۶ = ۱.۰۵$  حاصل کیا ہے تو اس کے بعد طریقہ ذیل انجام پاسکتا ہے:-

$$\text{ل} \text{جیب} ۶ = ۹۵۱۳۰$$

$$\text{ل} ز = ۹۵۹۸۳۱$$

$$\text{ل} \text{زجم} ۶ = ۹۵۳۹۶۱$$

$$۱ - \text{زجم} ۶ = ۱۵۲۴۹$$

$$\text{ل} \text{جیب} ۶ = ۹۵۹۸۴۹$$

$$\text{لوک ز قم} ۱ = ۵۵۲۹۷۵$$

$$\text{لوک زجم} ۶ = ۵۵۲۸۲۴$$

$$\text{زجم} ۶ = ۱۹۱۲۰۰$$

$$۱۳۵۳۵۳ =$$





$$و = ط + (۲ - ز) \cdot \frac{۱}{۳} ز \cdot ط + \frac{۵}{۳} ز جب ط + \frac{۱۳}{۱۲} ز جب ط$$

(۷) .....

یہ مساوات علم ہیئت میں ایک اساسی مساوات ہے۔ اس سے کسی سیارہ کی اصلی بے قاعدگی اس کی اوسط بے قاعدگی کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے۔ یہاں اسے خروج المرکز کی تیسری قوت تک محسوب کیا گیا ہے لیکن موجودہ مقاصد کے لیے تیسری قوت بالعموم بہت چھوٹی ہوتی ہے اور اس لیے ناقابل توجہ، پس ضابطہ

$$و = ط + ۲ ز جب ط + \frac{۵}{۳} ز جب ط$$

کو یہاں کافی صحیح ضابطہ سمجھا جائے گا۔  
اصلی بے قاعدگی اور اوسط بے قاعدگی کے فرق یعنی و۔ ط کو مرکز کی مساوات کہتے ہیں اور اسے

$$۲ ز جب ط + \frac{۵}{۳} ز جب ط$$

سے تعبیر کرتے ہیں۔

اوسط بے قاعدگی کو اصلی بے قاعدگی کی رقوم

میں بیان کرنا۔ وہ صغیر رقبہ جو سمتی نیم قطر سے عبور ہوتا ہے جبکہ سیارہ کی اصلی بے قاعدگی بقدر فرو کے بڑھتی ہے  $\frac{۱}{۳} ر$  فرو ہے۔ اگر اس رقبہ کو متسم کرنے میں وقت فرت صرف ہوا اور اگر سیارہ کی مدت دوران ت ہو تو پھر کے دو سرے کلیہ سے

$$\frac{۱}{۳} ر فرو : ۱۱ ب :: فرت : ت$$

اگر وقت فرت میں اوسط بے قاعدگی میں اضافہ فرط ہو تو

$$فرط : ۱۲ :: فرت : ت$$



اس لیے  $\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}} = \frac{r}{b}$  ، ..... (۸)

اس مساوات کو حسب ذیل طریقہ پر بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}} = \frac{r(1-z)}{r(1+z)}$$

اس لیے  $p = r(1-z)^2$  (۱-۲ زجم و ۳+۲ زجم و ۴-۳ زجم و) فرد اور تکمل سے

$p = d - 2$  زجب و  $+$   $3$  زجب و  $-$   $1$  زجب و ..... (۹)  
جس میں  $z$  کی تین سے اعلیٰ ترقوتیں نظر انداز کی گئی ہیں۔

[عام پھیلاؤ] — یہ سلسلہ حسب طریقہ ذیل حاصل کیا جاسکتا ہے۔  
(۸) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}} = \frac{\text{جم نہ}}{\text{فر نہ}} \left( \frac{\text{جب نہ}}{\text{جم نہ} + 1} \right) \text{ جہاں } z = \text{جب نہ}$$

اگر ہم  $la = \text{فرو}$  رکھیں تو اس کی تصدیق کرنا آسان ہے کہ

$$\left\{ \frac{\text{جب نہ}}{\text{جم نہ} + 1} = \text{مس نہ} \right\} \left\{ \frac{1}{\text{مس نہ} + 1} - \frac{1}{\text{مس نہ} + 1} \right\}$$

$$= \text{مس نہ} \{ 2 + (1 - \text{جم ک و مس ک}) \}$$

اور اس لیے

$$\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}} = \frac{\text{جم نہ}}{\text{فر نہ}} [\text{مس نہ} \{ 2 + (1 - \text{جم ک و مس ک}) \}]$$

$$= \{ 2 + (1 - \text{جم ک و مس ک}) \}$$

۲+ جب نہ جم نہ ۳ (-۱) جم ک و فر (مسک ۱/۲ نہ)

$$= ۲+۱ (-۱) جم ک و مسک ۱/۲ نہ$$

۲+ جب نہ جم نہ ۳ (-۱) جم ک و مسک ۱/۲ نہ ۱/۲ مس ۱/۲ نہ

$$= ۲+۱ (-۱) جم ک و مسک ۱/۲ نہ (۱+ک جم نہ)$$

تکمل کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$ط = ۲+۱ (-۱) جم ک و مسک ۱/۲ نہ (۱+ک جم نہ) جب ک و$$

تکمل کا مستقل صفر ہے کیونکہ ط اور و ایک ساتھ معدوم ہوتے ہیں۔ اس سلسلہ (۱۶۳) کی پہلی چار زمیں ہیں

$$ط = ۲-۱ مس ۱/۲ نہ (۱+جم نہ) جب و$$

$$+ مس ۱/۲ نہ (۲+۱ جم نہ) جب ۲ و$$

$$= ۲ مس ۱/۲ نہ (۳+۱ جم نہ) جب ۳ و$$

اگر ز کی تین سے اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز کی جائیں تو

$$نہ = ز + ۱/۲ ز ۳ جم نہ = ۱ - ۱/۲ ز اور مس ۱/۲ نہ = ۱/۲ ز + ۱/۲ ز$$

اور اس لیے حسب سابق مائل ہوتا ہے

$$ط = ۲-۱ ز جب و + ۳ ز جب ۲ و - ۱/۲ ز جب ۳ و$$

مثال ۱- یہ دیا گیا ہے کہ

$$ط = ۲-۱ ز جب و + ۳ ز جب ۲ و - ۱/۲ ز جب ۳ و$$

جہاں  $z$  ایک چھوٹی مقدار ہے جس کی تین سے اعلیٰ تر سب قوتیں نظر انداز کی گئی ہیں۔  
سلسلہ کو الٹا کر ثابت کرو کہ

$$w = (z - \frac{1}{2} z^2) \text{ جب } z + \frac{5}{2} z^2 \text{ جب } z + \frac{13}{12} z^3 \text{ جب } z$$

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ کسی سیارہ کی حرکت کی سمت اور اس کے  
سمتی نیم قطر کے درمیانی زاویہ کا  $\cos \sqrt{1 - z^2}$  ز جب  $z$  ہے۔

مثال ۳۔ اگر خروج المرکز جب  $z$  نہ اکائی کے بہت ہی قریب  
ہو تو ثابت کرو کہ اوسط بے قاعدگی  $z$ ، اصلی بے قاعدگی  $w$  کی رقوم میں حسب  
ذیل ضابطہ کے ذریعہ بیان ہو سکتی ہے

$$z = \frac{w^2 \text{ جم } z}{(1 + \text{جب } z) \left( 2 - \frac{z}{3} + \frac{1}{2} \text{ جب } z + \frac{1}{3} \left\{ \frac{z^2}{5} + \frac{z^3}{3} \right\} \right)}$$

جہاں  $z = \frac{1}{2} w$ ۔

مثال ۴۔ مساوات  $z = w - z \text{ جب } z$  سے  $w$  کو حل کرنے کا  
حب ذیل ترتیبی طریقہ ثابت کرو جو جے۔ سی۔ آڈمس نے دیا ہے :-

جیوب کا منحنی  $z = w - z \text{ جب } z$ ۔ مبداء  $w$  سے محور  $z$  پر  $w = z$  ناپ  
ہ میں سے ایک خط کھینچو جو محور  $z$  سے زاویہ  $z$  بنائے اور فرض کرو کہ یہ خط  
منحنی کو نقطہ  $z$  پر قطع کرتا ہے۔ تب  $z$  کا فصلہ  $w$  ہے۔

مثال ۵۔ مساوات  $z = w - z \text{ جب } z$  سے  $w$  کے حل کے لیے لیویریئر  
(Leverrier) کا قاعدہ ثابت کرو اگر  $z$  کی تین سے اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز

کی جا سکتی ہوں

$$w = z + \frac{1}{2} \left( \frac{z \text{ جب } z}{1 - z \text{ جم } z} \right) - \frac{z \text{ جب } z}{1 - z \text{ جم } z}$$

مثال ۶۔ اگر ایک سیارہ کا طول بلد طہ ہو جو خالی ماسکہ کے

گرد ایک اوج سے ناپا گیا ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{طہ} = \text{ن ت} + \frac{1}{4} \text{ن ز جب} \text{ن ت}$$

اگر ز کی دو سے اعلیٰ ترقوتیں نظر انداز کی جائیں۔

\* مثال ۷۔ اگر ج (طہ)  $\frac{1}{4}$  (طہ + جم طہ) کو تغیر کرے تو ثابت (۱۶۴)  
کرو کہ مساوات طہ = ۶ - ز جب ۶ کو حسب ذیل شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\text{ط} = \text{ج} (\text{قہ} + ۶) - (\text{ج} - \text{قہ}) \text{ جہاں ز} = \text{جب قہ}$$

نیز بتاؤ کہ ج (طہ) کی قیمتوں کی ایک جدول سے کیلر کے مسئلہ کو حل کرنے  
میں کس طرح آسانی پیدا ہوتی ہے۔

دیکھو مشٹر آلدیس (Aldis) کا مضمون مندرجہ ذیل نوٹس آرے  
ایس جلد ۶۲ صفحہ ۶۳۳ جس میں یہ جدول دی گئی ہے اور اس کے استعمال  
کی مثالیں درج ہیں۔

۵۳۔ ناقصی حرکت کے وہ ضابطے جو تربیعوں کے

ذریعہ بیان کئے گئے ہوں۔

فرض کرو کہ سیارہ کے خفیض کا طول بلد جسے مدار کے مستوی میں

ایک ثابت سمت سے پیمائش کیا گیا ہے حہ ہے اور سیارہ کا طول بلد

طہ ہے اور اصلی بے قاعدگی و = (طہ - حہ)۔ مقدار ب ۱/۲ کو ل سے

تغیر کیا گیا ہے اور مدت دوران د ہے۔

قطع ناقص کے خواص سے سمتی نیم قطر کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$r = \frac{l}{1 + \text{ز جم} (\text{طہ} - \text{حہ})} \dots \dots \dots (۱)$$

کسی جرم کے لیے جو سورج کے گرد حرکت کرتا ہو حسب دفعہ  
حاصل ہوتا ہے

$$r \text{ قسط} / \text{فرت} = \sqrt{a} \dots \dots \dots (۲)$$

(۲) کو فرت کے لیے حل کرنے، (۱) سے رکی قیمت درج کرنے اور تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ت = \frac{ل}{\sqrt{م}} \int \frac{فرط}{\{۱ + زجم (ط - ح)\}^2} \dots (۳)$$

جہاں ت وہ وقت ہے جس میں سیارہ ضیض سے اصلی بے قاعدگی و (ط - ح) تک ایک مدار جس کا خروج المرکز ز اور وتر خاص ل ہے حرکت کرتا ہے۔ مساوات بالا کو متجانس شکل

$$د = \frac{ت}{\frac{ل}{\sqrt{م}} \int \frac{۱}{\{۱ + زجم (و)\}^2} فرو$$

میں بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں د، علی الترتیب زمین کا واسطہ فاصلہ اور مدت دوران ہیں۔

(۱) کو ت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر

$$\frac{فروت}{فروت} = \frac{ل زجب (ط - ح)}{\{۱ + زجم (ط - ح)\}^2} = \frac{فرط}{فروت} = \frac{ز}{ل}$$

$$= ز \sqrt{م} جب (ط - ح) \sqrt{ل}$$

$$نیز \frac{ر}{فروت} = \sqrt{م} \{۱ + زجم (ط - ح)\} \sqrt{ل}$$

اور اس لیے سیارہ کی رفتار کے مربع کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$\left(\frac{فروت}{فروت}\right)^2 + \left(\frac{ر}{فروت}\right)^2 = م \{۱ + زجم (ط - ح) + ز^2\} ل$$

$$= ۲ م - ۱ م - ۱$$

(۱۶۵) اسے متجانس شکل

$$\frac{1}{2} \pi^2 \left( \frac{1}{d} - \frac{2}{r} \right)$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے جو عمل حساب کے لیے زیادہ سہولت بخش ہے۔  
اگر مدار قطع مکانی ہو جیسا کہ وہ مدار ہوتا ہے جس میں دُمدار ستارہ کی  
بڑی اکثریت گردش کرتی ہے تو اس صورت میں  $r = 1$  اور  $d = \infty$  ایسے  
ضابطے (۱) اور (۳) ہو جاتے ہیں

$$r = \frac{1}{p} \text{ لقطہ } - \frac{1}{p} (\text{طہ} - \text{مہ})$$

$$\text{ت} = \frac{2\pi a}{v} \left\{ \text{مس} \frac{1}{p} (\text{طہ} - \text{مہ}) + \text{مس} \frac{1}{p} (\text{طہ} - \text{مہ}) \right\} \dots (۴)$$

یہ نتیجہ جس پر ہم پہنچے ہیں یوں بیان کیا جاسکتا ہے :- فرض کرو کہ کسی  
سیارہ (مثلاً زمین) کی مدت دوران اور اوسط فاصلہ علی الترتیب  $d$  اور  $v$   
ہیں۔ اگر ایک دُمدار ستارہ کے مکانی مدار کا وتر خاص  $l$  ہو تو وہ وقت  
جس میں یہ دُمدار ستارہ حقیض سے اصلی بے قاعدگی و تک گذرتا ہے  
تب ذیل ہے

$$2\pi a \left( \text{مس} \frac{1}{p} + \text{مس} \frac{1}{p} \right) \text{ و } \frac{1}{p} \pi^2$$

**یولر کا مسئلہ**۔ مکانی حرکت کی ایک مشہور خاصیت  
یولر کے مسئلہ میں بیان ہوئی ہے۔ یولر کے مسئلہ کا دعویٰ حسب ذیل ہے۔  
اگر کسی دُمدار ستارے کے مکانی مدار میں دو نقطے ج اور ج' لیے جائیں  
اور سو دج سے ان نقطوں تک سمتی نیم قطر  $r$  اور  $r'$  ہوں اور اگر فاصلہ ج ج'  $l$   
ک ہو تو ج سے ج تک حرکت کرنے میں دُمدار ستارے کو جو وقت  
لگے گا وہ

$$\frac{2\pi a}{v} \left\{ \left( \frac{r+r'}{p} \right) - \left( \frac{r-r'}{p} \right) \right\}$$



اس کی ایک اہم توسیع اُس عام تر صورت کے لیے جو قطع ناقص میں حرکت سے متعلق ہے لیمرٹ (Lambert) نے بیان کی ہے جسے حسب ذیل طریقہ پر واضح کیا جاسکتا ہے۔  
اگر ایک سیارہ اُس محل سے جہاں سمتی نیم قطر ہے اُس محل تک جہاں سمتی نیم قطر رہے حرکت کرنے میں وقت  $t$  لے لے اور اگر ان دو محلوں کا درمیانی وتر  $k$  ہو تو

$$۲۲ ت \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a''} \quad (\text{جب } a' = \infty)$$

$$\text{جہاں} \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{a''} \quad \text{اور جب} \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a''} \quad \text{جب } a' = \infty$$

اور سیارہ کی مدت دوران  $2\pi$  ہے۔  
چونکہ

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad r' = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}$$

$$k^2 = \frac{a^3(1 - e^2)^3}{(1 - e \cos \theta)^3} + \frac{a^3(1 - e^2)^3}{(1 + e \cos \theta)^3}$$

$$۲۲ ت \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a''} \quad (\text{جب } a' = \infty)$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} + \frac{1}{a''} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} + \frac{1}{a''}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{a''} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a''} \quad (\text{جب } a' = \infty)$$

$$k^2 = \frac{a^3(1 - e^2)^3}{(1 - e \cos \theta)^3} + \frac{a^3(1 - e^2)^3}{(1 + e \cos \theta)^3}$$

$$۲۲ ت \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a''} \quad (\text{جب } a' = \infty)$$

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر  $k$  اور  $a$  سے  $e$  معلوم ہوں تو  $(r + r')$   $k$  اور  $t$  مقداروں  $e$  اور  $a$  کے تفاعل ہیں۔





اس کی ایک اہم توسیع اُس عام تر صورت کے لیے جو قطع ناقص میں حرکت سے متعلق ہے لیمبرٹ (Lambert) نے بیان کی ہے جسے حسب ذیل طریقہ پر واضح کیا جاسکتا ہے۔  
اگر ایک سیارہ اُس محل سے جہاں سمتی نیم قطر ہے اُس محل تک جہاں سمتی نیم قطر ہے حرکت کرنے میں وقت  $t$  لے لے اور اگر ان دو محلوں کا درمیانی وتر  $k$  ہو تو

$$۲۲ ت \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a''} \quad (\text{جب } a' = \infty)$$

$$\text{جہاں} \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{a''} \quad \text{اور جب} \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a''} \quad \text{جب } a' = \infty$$

اور سیارہ کی مدت دوران  $\Delta$  ہے۔  
چونکہ

$$r = a(1 - e \cos \theta) \quad r' = a'(1 - e' \cos \theta') \quad r'' = a''(1 - e'' \cos \theta'')$$

$$k^2 = a^2(1 - e^2) + a'^2(1 - e'^2) + a''^2(1 - e''^2) \quad (\text{جب } e = e' = e'')$$

$$۲۲ ت \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a''} \quad (\text{جب } e = e' = e'')$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} + \frac{1}{a''} \quad (\text{جب } e = e' = e'')$$

$$\text{اس لیے} \quad (r + r') \frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{a'} + \frac{1}{a''} \quad (\text{جب } e = e' = e'')$$

$$k^2 = a^2(1 - e^2) + a'^2(1 - e'^2) + a''^2(1 - e''^2) \quad (\text{جب } e = e' = e'')$$

$$۲۲ ت \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a''} \quad (\text{جب } e = e' = e'')$$

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر  $k$  اور  $a$  سے  $\Delta$  معلوم ہوں تو  $(r + r')$  اور  $k$  اور  $a$  اور  $e$  اور  $e'$  اور  $e''$  کے تفاعل ہیں۔



ہمیں معلوم ہے

$$p = 6 - z \text{ جب } 6$$

$$r = \left\{ \frac{\left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ مس } \frac{1}{2}}{\left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ مس } \frac{1}{2}} \right\} z - \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ مس } \frac{1}{2}$$

$$\left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ مس } \frac{1}{2} \text{ کی بجائے لے لکھو تو}$$

$$\frac{1}{2} p = \text{مس } \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} z$$

$$= \frac{1}{3} z - \frac{1}{5} z + \frac{1}{7} z - \frac{1}{9} z + \frac{1}{11} z - \frac{1}{13} z + \dots$$

$$= (z-1) - \frac{1}{3} z + \frac{1}{5} z - \frac{1}{7} z + \frac{1}{9} z - \frac{1}{11} z + \dots$$

$$= (z-1) \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ مس } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ مس } \frac{3}{2} + \frac{1}{5} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{5}{2}} \text{ مس } \frac{5}{2} - \dots$$

$$+ \frac{1}{7} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{7}{2}} \text{ مس } \frac{7}{2} - \dots$$

$$\frac{1}{2} p = \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} z \quad \text{لیکن}$$

$$p = \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} z$$

$$\frac{1}{2} p = \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} z \quad \text{ایسے}$$

$$+ \frac{1-5z}{5} \frac{1-z}{1+z} \text{ مس } \frac{1}{5} \text{ و } \dots$$

مکانی مدار کے لیے دفعہ ۵۲ کی مساوات (۴) حاصل ہوئی تھی، اس کے جواب میں قطع ناقص یا قطع زائد کے لیے مساوات بالا حاصل ہوئی ہے۔ اگر ہمیں  $z = 1$  رکھا جائے تو ہمیں صرف یہ مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$1 - \frac{1}{2} = \left\{ \text{مس } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \text{ مس } \frac{1}{6} \right\}$$

کیونکہ دوسری رقم کے بعد سب رقموں میں (۱-ز) ایک جزو ضربی کے طور پر شامل ہے  
مثال ۳۔ ثابت کرو کہ ایک دُمدار ستارہ زمین کے مدار کے اندر جتنا وقت صرف کرتا ہے وہ ایک سال کا  $2\pi(1-\tau)$  (۲+۱) حصہ ہے جہاں  $\tau$  دُمدار ستارے کا حقیقی فاصلہ ہے اور فاصلہ کی اکائی زمین کا شمس مرکزی فاصلہ ہے جسے مستقل سمجھا گیا ہے۔ دُمدار ستارے کے مدار کا ایک قطع مکانی ہونا اور اس کا طریق الشمس کے ستوی میں ہونا تسلیم کر لیا گیا ہے۔  
چونکہ  $1 - \frac{1}{2} = \tau$  اس لیے ضمیمہ سے اصلی بے قاعدگی و تک وقت کے لیے جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\tau^{\frac{2}{3}} \left( \text{مس } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \text{ مس } \frac{1}{6} \right) = 2\pi$$

نیز  $r = \tau^{\frac{1}{3}}$   $\tau = \frac{1}{2}$  سے اس نقطہ کی اصلی بے قاعدگی متعین ہوگی جہاں اس لیے حجم  $\frac{1}{2}$  و  $\tau = \frac{1}{2}$  سے اس نقطہ کی اصلی بے قاعدگی متعین ہوگی جہاں دُمدار ستارہ زمین کے مدار کو عبور کرتا ہے۔ اس لیے مس  $\frac{1}{2}$  و کی بجائے اندراج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \frac{\tau^{\frac{2}{3}}}{2\pi} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} \right) \right\} \frac{\tau^{\frac{2}{3}}}{2\pi}$$
  
کہ مدار سے ضمیمہ تک وقت ہے اور اس وقت کا دُگنا سوال کا جواب ہے  
بلکہ بڑی سے بڑی قیمت  $2\pi \sqrt{2}$  ہے جبکہ  $\tau = \frac{1}{2}$

\* مثال ۴۔ دو سیارے ہم مستوی مداروں میں حرکت کر رہے ہیں۔ ثابت کرہ کہ جب یہ سیارے ایک دوسرے سے قریب ترین ہوتے ہیں تو ان کے طول بلدوں طہ اور طہ کو حسب ذیل دو مساواتیں پوری کرنی چاہئیں :-

$$\frac{\sin(\text{طہ})}{\sin(\text{طہ})} = \frac{\sin(\text{طہ})}{\sin(\text{طہ})} \quad \text{ت۔ ل۔ طہ۔ فرطہ}$$

$$\text{اور } \frac{\sin(\text{طہ})}{\sin(\text{طہ})} = \frac{\sin(\text{طہ})}{\sin(\text{طہ})} + \frac{\sin(\text{طہ})}{\sin(\text{طہ})} \quad \text{جب (طہ۔ طہ) (ر۔ رجم (طہ۔ طہ))}$$

$$+ \text{جب (طہ۔ طہ) (طہ۔ طہ) (طہ۔ طہ) (طہ۔ طہ)} =$$

جہاں ت اور ت وہ لمحات ہیں جن پر یہ سیارے خفیف میں سے گزرتے ہیں۔ پہلی مساوات سے صرف یہ بیان ہوتا ہے کہ سیارے ایک ہی آن پر طول بلد طہ اور طہ رکھتے ہیں۔

دوسری مساوات معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ۲۔ ر رجم (طہ۔ طہ) (۱۶۹) + ۲ کو اقل ہونا چاہئے، اس لیے

$$\frac{\sin(\text{طہ})}{\sin(\text{طہ})} - \frac{\sin(\text{طہ})}{\sin(\text{طہ})} = \frac{\sin(\text{طہ})}{\sin(\text{طہ})} + \frac{\sin(\text{طہ})}{\sin(\text{طہ})} \quad \text{ر۔ رجم (طہ۔ طہ) (طہ۔ طہ) (طہ۔ طہ) (طہ۔ طہ)}$$

$$+ \text{ر رجم (طہ۔ طہ) (طہ۔ طہ) (طہ۔ طہ) (طہ۔ طہ)} =$$

اسیں  $\frac{\sin(\text{طہ})}{\sin(\text{طہ})} = \frac{\sin(\text{طہ})}{\sin(\text{طہ})} = \frac{\sin(\text{طہ})}{\sin(\text{طہ})}$  درج کرنے سے دوسری مساوات مائل ہوتی ہے۔

اگر ز اور ز دونوں چھوٹے ہوں تو طہ اور طہ تقریباً مساوی ہیں اور دوسری مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$(1-1) \left\{ \frac{\sin(\text{طہ})}{\sin(\text{طہ})} - \frac{\sin(\text{طہ})}{\sin(\text{طہ})} \right\} \text{جب (طہ۔ طہ) (طہ۔ طہ) (طہ۔ طہ) (طہ۔ طہ)}$$

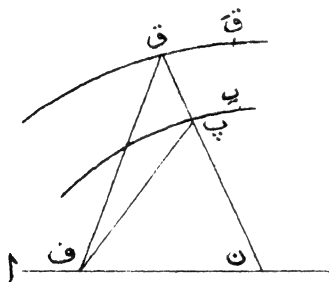
$$+ (1 - \frac{r}{R}) \text{ جب } (P - P) = 0$$

\* مثال ۵۔ ثابت کرو کہ زمین سے ایک سیارہ کا فاصلہ جس کا مدار طریقی الشمس کے مستوی میں ہے بالعموم اقل نہیں ہوگا جبکہ سیارہ تقابل میں ہو سوائے اُس صورت کے جبکہ زمین اُن دو نقطوں میں سے ایک یا دوسرے پر ہو جو سیارے کے مدار میں ہیں، لیکن اگر سیارہ اور زمین کے مداروں کے محضیضوں کے مس مرکزی طول بلد ایک ہی ہوں اور ان کے وتر خاص خروج المکزوں کی نسبت مثناة میں ہوں تو محولہ بالا فاصلہ ہر تقابل پر اقل ہوگا۔

[Math. Trip. 1. 1900]

اسے سوال ۴ سے اخذ کیا جاسکتا ہے یا دوسری طرح حسب ذیل طریقہ پر

ثابت کیا جاسکتا ہے:-



شکل (۵)

فرض کرو کہ وقت ت پر  
ان دو سیاروں کے محل پ' ق'  
(شکل ۵) ہیں اور وقت ت +  
مف ت پر ان کے محل پ' ق' ہیں۔  
اب اگر پ' ق' اقل یا اعظم ہو تو  
ہمیں ماصل ہونا چاہئے پ' ق'  
= پ' ق'۔ اس لیے

$$پ' پ' ق' پ' ن = ق' ق' ق' ق' ن$$

فرض کرو زاویہ (ف پ = ط، زاویہ (ف ق = ط، زاویہ  
(ن پ = س، زاویہ (ف پ پ' = ف، ق ق' = ف، ف' ف' پ  
= ر اور ف ق' = ر تو

$$پ' پ' ق' ف' = فر، پ' پ' ق' ف' = ر ف$$

اس لیے

$$پ' پ' ق' ن = پ' پ' ق' (ف + س)$$

= - فر حجم (طہ - سہ) + ر فر طہ جب (طہ - سہ)

= { - ز جب (طہ - سہ) حجم (طہ - سہ) } =

+ ر طہ جب (طہ - سہ) ر طہ فرت

= { ز جب (سہ - سہ) ر طہ + جب (طہ - سہ) ر طہ } = فرت

اس لئے اگر پ ق = پ ق تو مائل ہونا چاہئے

ز جب (سہ - سہ) ر طہ + جب (طہ - سہ) ر طہ = ز جب (سہ - سہ) ر طہ

+ جب (طہ - سہ) ر طہ

اگر طہ = طہ = سہ تو سیارہ تقابل میں ہے اور

ز جب (سہ - طہ) ر طہ = ز جب (سہ - طہ) ر طہ

پس طہ کی دو قیمتیں ہیں جن میں ۱۸۰ کا فرق ہے۔ یہ سوال کا پہلا حصہ ہے۔ (۱۰۰)

نیز اگر سہ = سہ اور ز ر طہ = ز ر طہ تو ہر تقابل پر یہ شرط پوری ہوتی ہے۔

مثال ۶۔ قطع مکانی کی قوس مرتسم کرنے میں جو وقت لگتا ہے اس کے

لیے یولر کا مسئلہ لیمرٹ کے مسئلہ سے کس طرح افد کیا جاسکتا ہے۔

اس صورت میں بہ اور عہ لا انتہا چھوٹے ہو جائیں گے۔

مثال ۷۔ سورج راس الحمل میں سے بتاریخ ۲۰ مارچ ۱۸۹۸ء بوقت

۲ گھنٹہ ۵ منٹ گذرا تھا اور راس المیزان میں سے بتاریخ ۲۲ ستمبر ۱۸۹۵ء بوقت

۱۲ گھنٹہ ۳۵ منٹ گذرا تھا۔ ثابت کرو کہ یہ وقفہ ان مہینوں کے مطابقی ہے کہ

زمین کے مدار کا خروج المرکز تقریباً  $\frac{1}{4}$  ہے اور خطِ اوہین خطِ اعتدالین پر تقریباً

علی القواائم ہے۔ [coll. Exam.]

اگر سورج ایک اعتدالی نقطہ پر ہو اور اگر ز قابلِ نظر انداز ہو تو آسانی

یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

جب (سہ + عہ) = ز جب سہ

پس ع کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنی ز جب سہ - سہ اور ۱۱ - سہ - ز جب سہ -



اگر ۶ اور ۷ میں سے گزرنے کے اوقات علی الترتیب ت اور ت ہوں اور حقیض میں سے گزرنے کا وقت ت اور سال کا طول ۵ ہو تو

۲۲.  $\frac{ت-ت}{۵} = زجب-ه-ه-زجب (زجب-ه-ه)$

# آٹھواں باب استقبال اور کبو

(۱۴۱)

صفحہ	دفعہ
۲۶۳	۵۴ — قمر شمسی استقبال کا مشاہدہ
۲۶۶	۵۵ — قمر شمسی استقبال اور کبو کی طبیعی توضیح
۲۷۰	۵۶ — سیاروی استقبال
۲۷۳	۵۷ — صعود مستقیم اور میل کی رقوم میں استقبال اور کبو کیلئے عام ضابطے
۲۸۵	۵۸ — راس الحمل کی حرکت طریق الشمس پر
۲۸۹	۵۹ — غیر تابع یومی اعداد
۳۰۰	۶۰ — سناروں کی ذاتی حرکتیں
۳۰۲	۶۱ — ارضی عرض بلدوں میں تغیرات

## ۵۴ — قمر شمسی استقبال کا مشاہدہ — وہ اہم منظر جسے ہم

اغذالین کے استقبال کے طور پر جانتے ہیں بہت آسانی سے واضح ہو جاتا ہے اگر ایک آن پر کسی ثابت ستارہ کے مشاہدہ کردہ صعود مستقیم اور میل کا مقابلہ ایک دوسری آن پر جو اول الذکر آن سے کافی فصل رکھتی ہو اسی ستارہ کے مشاہدہ کردہ صعود مستقیم اور میل کے ساتھ کیا جائے۔ مثلاً لاقطب تارے کے محدود حسب تفصیل ذیل معلوم ہوئے تھے :-

قطب تارہ یکم جنوری ۱۸۵۰ء } ص - م (معود مستقیم) گھنٹہ ۱ منٹ ۵ ثانیہ ۲۳  
 ضہ (میل) ۸۸۰ ۳۰ ۴۹  
 ان کا مقابلہ اسی ستارے کے ان محدودوں سے کرنا ہے جو ۵۰ سال بعد حاصل ہوں گے :-

قطب تارہ یکم جنوری ۱۸۵۹ء } ص - م گھنٹہ ۱ منٹ ۲۳ ثانیہ ۲۳  
 ضہ ۸۸۰ ۴۶ ۵۳

ہم دیکھتے ہیں کہ محدودوں کے ان دو جٹوں میں معود مستقیم کے درمیان پاؤ گھنٹہ سے زیادہ فرق اور میل کے درمیان پاؤ درجہ سے زیادہ فرق پایا جاتا ہے۔ ان فرقوں پر بڑی توجہ کی ضرورت ہے۔

پہلی نظر میں یہ خیال ہو سکتا ہے کہ قطب تارے کے ظاہری محل کا یہ تغیر خود اس کی حقیقی حرکتوں کا نتیجہ ہے۔ لیکن ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اس منظر کی ایسی توجہ نہیں کی جاسکتی۔ یہ ہو سکتا ہے کہ کسی نقطہ کے محدودوں میں تبدیلیاں ان محوروں میں تبدیلیوں کی وجہ سے پیدا ہوں جن کے لحاظ سے ان محدودوں کی پیمائش عمل میں آئی ہے یا خود نقطے کے محل میں مطلق تبدیلیوں کا نتیجہ ہوں۔ ہم ثابت کرینگے کہ ستارے کے مقام میں یہ تبدیلیاں صرف ظاہری ہیں۔ وہ ستارے کے مقام کی تبدیلیوں سے نہیں بلکہ اس بڑے دائرے کے مقام کی تبدیلیوں سے منسوب کیجانی چاہئیں جس کے حوالہ سے ستارہ کا مقام تعین کیا جاتا ہے۔ یہ تبدیلیاں ان مظاہر کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں جو استقبال اور کج کے طور پر مشہور ہیں۔

ستارے کے میل پر غور کرو جو نصف صدی کے عرصہ میں ۱۶۰ سے زیادہ درجہ چکا ہے یا سالانہ ۱۹ کی اوسط شرح سے ۱۹ قطب اور قطب تارے کا درمیانی فاصلہ سالانہ ۱۹ کی شرح سے

گھٹ رہا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قطب یا قطب تارہ یا دونوں حرکت میں ہونے چاہئیں۔ لیکن قطب تارے کے قطبی فاصلہ کے اس تغیر کا کوئی قابل فوجہ اس ستارے کی ذاتی حرکت (دفعہ ۶۰) سے منسوب نہیں کیا جاسکتا۔ اگر قریب کے ستاروں سے قطب تارے کا فاصلہ ناپا جائے تو اس میں کوئی ایسا تغیر نہیں پایا جاتا جس کا مقابلہ اس تغیر سے کیا جاسکے جو قطب تارے اور قطب کے درمیانی فاصلہ میں پایا جاتا ہے۔ قطب تارے کی اگر کوئی حقیقی ذاتی حرکت ہے بھی تو وہ اس قدر خفیف ہے کہ وہ اس تارے کے میل میں مشاہدہ کردہ تبدیلیوں کا باعث نہیں ہو سکتی۔ یہ بھی واضح رہے کہ پچاس سال کے عرصہ میں دوسرے ستاروں کے قطبی فاصلوں میں بالعموم بڑا تغیر پایا جاتا ہے لیکن خود ستاروں کے باہمی فاصلوں میں کوئی قابل قدر تبدیلیاں نظر نہیں آتیں۔ پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ قطب تارے اور قطب کے درمیانی فاصلہ میں جو تبدیلیاں واقع ہوتی ہیں وہ خود قطب تارے کی حرکت سے منسوب نہیں کی جانی چاہئیں بلکہ انہیں قطب سماوی کی حرکت سے منسوب کرنا چاہئے۔ اب ہم اس حرکت کی نوعیت کا مطالعہ کر بیٹھے۔

اگر قطب کمرہ سماوی پر اپنا محل مسلسل بدلتا ہے تو سماوی خط استواء کی بھی مسلسل حرکت ہونی چاہئے کیونکہ خط استواء پر کا ہر نقطہ ہر حال قطب سے ۹۰° پر ہونا چاہئے۔ چنانچہ خط استواء حرکت کرتا ہے لیکن طریق الشمس کے ساتھ اس کا اوسط میلان مستقل رہتا ہے۔ یہ زاویہ صرف چند ثانیوں کی مقدار میں طریق الشمس کی ایک جانب یا دوسری جانب متزلزل ہوتا ہے۔ وسط گرما میں سورج کا میل طریق الشمس کا میلان ہے اور یہ میلان ششما میں بھی وہی تھا اور سنہ ۱۹۰۰ء میں بھی وہی (دیکھو صفحہ ۲۰۸)۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ خط استواء کی حرکت اس طرح ہونی چاہئے کہ وہ طریق الشمس کو جسے ثابت مسموع کیا گیا ہے تقریباً ایک مستقل زاویہ پر قطع کرے اور اعتدالی نقطے طریق الشمس زمین کی حرکت کی سمت کے مخالف حرکت کریں۔ طریق الشمس کے قطب کو

کرہ سماوی پر ثبات خیال کیا جاسکتا ہے اور مذکورہ بالا حرکت کی وجہ سے خط استواء کا قطب طریقی شمس کے قطب کے گرد ایک چھوٹا دائرہ مرتسم کرتا ہے یہ وہ حرکت ہے جو اعتدالین کے قمر شمسی استقبال کے نام سے مشہور ہے۔ اس کا سادہ ترین اظہار کسی ستارہ کے طول بلد میں مسلسل اضافہ کے ذریعہ ہوتا ہے درآنحالیکہ ستارہ کا عرض بلد غیر متبدل رہتا ہے۔ بالعموم قمر شمسی استقبال سے کسی جرم فلکی کے میل اور صعود مستقیم دونوں میں تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

### ۵۵۔ قمر شمسی استقبال اور کبوج کی طبعی توضیح۔ اُس محور کی

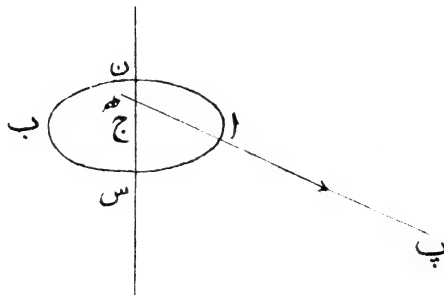
سمت میں جس کے گرد زمین اپنی یومی گردش کرتی ہے، بہت سست تبدیلیاں واقع ہوتی ہیں اور یہ تبدیلیاں استقبال اور کبوج کے منظر ہر پیدا کرتی ہیں مستقل سمت سے زمین کے محور کا یہ خلل اس واقعہ کی وجہ سے ہے کہ زمین جیسے ایک کرہ غائی جسم پر بیرونی جسم (چاند یا سورج) کی کشش کا حاصل زمین کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والی ایک واحد قوت نہیں ہے۔

اگر زمین فی الواقعہ ایک کروی استوار جسم ہوتی اور اگر ہر اندرونی ہم مرکز کروی خول کی سطح پر کشافت مستقل ہوتی تو کسی بیرونی جسم (جیسے کہ چاند یا سورج) کی کشش ایک قوت کے حامل ہوتی جو کرہ کے مرکز پر عمل کرتی۔ اگر کسی قوت کا خط عمل اُس جسم کے مرکز ثقل میں سے گزرے جس پر یہ عمل کرتی ہے تو جسم کی گردش پر جو مرکز ثقل کے گرد ہو ایسی قوت کا کچھ اثر نہ ہوگا۔ لیکن اُن حالات کے تحت جو نظام شمسی میں موجود ہیں نہ سورج کی کشش اور نہ چاند کی کشش زمین کے مرکز ثقل میں سے گذرتی ہے۔ اس لیے زمین کی گردش میں وہ خلل پیدا ہوتے ہیں جن پر اب ہم غور کریں گے۔

اگرچہ اُن وجوہ کی بنیاد پر جو بعد میں بیان کئے جائیں گے استقبال کے سورج کی یہ نسبت چاند کا زیادہ حصہ ہے لیکن ہم پہلے سورج

اثر پر غور کریں گے کیونکہ زمین کے لحاظ سے اس کی انسانی حرکت چاند کی حرکت کی یہ نسبت زیادہ سادہ ہے۔

اگر ہم یہ مان لیں کہ زمین ایک گردشی جسم ہے اور خط استواء کے گرد متشکل ہے تو چونکہ ن (شکل ۵۰) زمین کا محور ہے اور ج اس کا مرکز اور پ کوئی بیرونی ذرہ اس لیے مستوی ن میں پ زمین کو متشکل تقسیم کرتا ہے اور اس لیے زمین پر پ کی حاصل کشش مستوی ن میں پ میں واقع ہوتی ہے، نیز اگر پ خط استواء کے مستوی میں ہو تو حاصل کشش بھی اس مستوی میں ہوگی۔ اس لیے اگر پ استوائی مستوی ا ب میں واقع ہو تو حاصل کشش ج پ پر ہوگی۔ اگر پ محور ن میں ہوتا (اس صورت پر غور کرنا ضروری نہیں ہے) تو یہ واضح ہے کہ حاصل کشش ج پ پر ہوتی لیکن پ کے کسی دوسرے مقام کے لیے جیسے کہ شکل ۵۱ میں دکھایا گیا ہے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ حاصل کشش ج میں سے نہیں نکلتی بلکہ مستوی ن میں پ میں واقع ہونے والے ہ پ کی طرح کے ایک خط پر عمل کرتی۔



شکل (۵۰)

پہلی نظر میں یہ خیال ہو سکتا ہے کہ یہ قوت ن میں کو ہ پ کے

عمود و اریست میں پھیرنے کا میلان رکھے گی یعنی بالفاظ دیگر چونکہ تجاذبی جسم سورج ہے اس لیے ایسی قوت کا فوری اثر بظاہر یہ معلوم ہو گا کہ وہ زمین کے خط استوا کو بطریق الشمس کی جانب لانے پر مجبور کر رہی ہے۔ لیکن یہ واقعہ کہ زمین تیزی کے ساتھ گردش کر رہی ہے اس بظاہر متناقض اثر کا باعث ہے کہ محور دن میں ہر لمحہ ایک ایسی سمت میں حرکت کرتا ہے جو مستوی ن میں پ میں نہیں بلکہ اس پر عمود وار ہے۔

اس غلط فہمی کی اچھی تشبیل معمولی لٹو سے ملتی ہے اگرچہ اس صورت میں ہم ایک جسم کے (جو فضا میں آزاد ہو) مرکز ثقل کے گرد گردش پر نہیں بلکہ ایک ثابت نقطہ کے گرد گردش پر بحث کر رہے ہیں۔ لیکن علم ریاضی کے نقطہ نظر سے یہ دونوں مسئلے بہت مشابہ ہیں۔ جبکہ لٹو اپنے تشاگل کے محور کے گرد تیز گردش کر رہا ہوتا ہے تو خود یہ محور آہستہ آہستہ انقباضی خط کے گرد ایک مخروط مرتسم کرتا ہے۔ پس لٹو کا یہ محور ہر آن ایک ایسی سمت میں حرکت کر رہا ہوتا ہے جو اس سمت کے عمود وار ہوتی ہے جس میں قوت جاذبہ ارض اس کو لانا چاہتی ہے لیکن اس سمت کی طرف جانے سے روکنے والا صرف یہ واقعہ ہے کہ لٹو کی گردش اپنے محور کے گرد خود محور کی مخروطی گردش کی بہ نسبت بہت زیادہ تیز ہے۔

(۱۷۵)

زمین کی یومی حرکت اس کے محور کی مخروطی حرکت کے مقابلہ میں بہت تیز معلوم ہوتی ہے کیونکہ موخر الذکر کا دور تقریباً ۲۴۵۰۰ سال ہے۔ لٹو کے محور کی مخروطی گردش کی تشبیل کو زمین کی گردش کی صورت پر (جبکہ سورج کے لحاظ سے پیدا شدہ ظل زیر غور ہو) استعمال کیا جائے تو ہمیں اس امر کی توقع رکھنی چاہئے کہ ارضی محور دن میں طریق الشمس کے مستوی کے عماد کے گرد آہستہ آہستہ ایک قائم مستدیر اسطوانہ مرتسم کرے گا۔

چنانچہ استقبال اور کج سورج کی بہ نسبت زیادہ اہم ہے کیونکہ زمین پر جاندار کی کشش کی بہ نسبت بہت ہی کم ہے تاہم چونکہ استقبال اور کج فرق پر منحصر ہوتا ہے جو زمین کے مختلف حصوں پر چلنے والے

جسم عائد کرتا ہے اس لیے چاند کی قربت اس کے استقبالی اثر کو سورج کے اثر کا تقریباً گنا کر دیتی ہے۔

چاند کے مدار کا مستوی طریق الشمس کے بہت قریب ہے چنانچہ وہ صرف ۵° کا چھوٹا زاویہ طریق الشمس سے بناتا ہے۔ چاند کا مدار اس میلان قائم رکھتے ہوئے مسلسل حرکت میں رہتا ہے اور اس کا عقدہ طریق الشمس پر اور اچکر تقریباً ۱۹ سال میں ختم کرتا ہے، صریحاً یہ مدت ۲۶۰۰۰ سال کے استقبالی دور کے مقابلہ میں بہت چھوٹی ہے۔ چونکہ چاند طریق الشمس سے ہمیشہ قریب رہتا ہے اور جتنا اس کے نیچے رہتا ہے اتنا ہی اوپر اور چونکہ اس کے مدار کا اوسط محل طریق الشمس پر منطبق ہوتا ہے اس لیے یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ چاند کے استقبالی عمل کا اصل حصہ اسی عام اثر کا متقیبی ہے جو سورج کے عمل کا ہے۔ سورج کا عمل اور چاند کے عمل کا یہ حصہ قمر شمسی استقبال کا باعث ہوتے ہیں جس کی وجہ سے اس محل ۷، طریق الشمس پر سالانہ ۱۰۰° کی شرح سے اس سمت میں حرکت کرتا ہے جو بڑھتے طول بلدوں کے مخالف ہے۔ اس مقدار کا تقریباً دو تہائی حصہ چاند کے عمل کی وجہ سے ہے اور باقی سورج کے عمل کی وجہ سے۔ خط استوا کے ساتھ طریق الشمس کا میلان ۳۶° قمر شمسی استقبال کی وجہ سے نہیں بدلتا۔

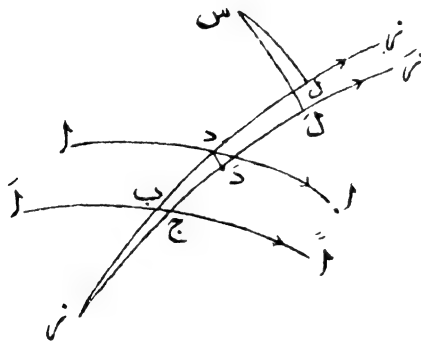
لیکن چاند کا ایک اہم اثر اس وجہ سے بھی ہے کہ اس کی حرکت اگرچہ طریق الشمس کے قریب ہے لیکن ٹھیک طریق الشمس کے مستوی میں نہیں ہے۔ چاند کے استقبالی عمل کا اقتضایہ ہے کہ زمین کا محور چاند کے مدار کے قطب کے گرد ایک مخروط مرتسم کرے لیکن خود چاند کا قطب طریق الشمس کے قطب کے گرد ۵° کے نصف فطر کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ اس کا اثر خط استوا کے مستوی پر دو گونہ ہے۔ ایک یہ کہ اس کی باعث اس محل ۷، اپنے اوسط مقام کے گرد جس کی تیشیں قمر شمسی استقبال کے لحاظ سے کی گئی ہو طریق الشمس پر آگے پیچھے چھوٹے دور کی



ایک اتھتر ازی حرکت رکھتا ہے۔ دوسرے یہ کہ سہ بھی اپنی اوسط قیمت کے گرد آگے پیچھے خفیف اتھتر اذ کرتا ہے۔ یہ مظاہر کبوتر (Nutation.) کے طور پر معروف ہیں اور ان کا انکشاف بریڈلے (Bradley.) کے بڑے کارناموں میں سے ایک ہے۔ کبوتر کے پیدا کرنے میں سورج کا بھی کچھ اثر ہے لیکن وہ چاند کے اثر کے مقابلہ میں بہت قلیل ہے۔

## ۵۶۔ سیاروی استقبال۔ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں قمری استقبال

اور کبوتر خط استوا، اور طریق الشمس کے اضافی محل میں تبدیلی پیدا کرتے ہیں اور اس کی وجہ اول الذکر کی حرکت ہے۔ اب ہمیں یہ یاد رکھنا چاہئے کہ خود طریق الشمس بالکل ایک ثابت مشنوی نہیں ہے اور اس میں تبدیلیاں ہوتی رہتی ہیں اگرچہ یہ تبدیلیاں اس قدر قلیل ہیں کہ ان کو اکثر مقاصد



شکل (۵۸)

کے لیے غیر موجود سمجھا جاسکتا ہے اور طریق الشمس کو بالکل ثابت فرض کیا جاسکتا ہے۔ زمین پر دوسرے سیاروں کی کششوں کی وجہ سے طریق الشمس کی

یہ حرکتیں پیدا ہوتی ہیں۔ اعتدالی نقطوں کے محلوں میں اس طرح جو متبادلگی پیدا ہوتی ہے اس کو سیاری استقبال<sup>۱۸۵۰</sup> کہتے ہیں کیونکہ اس کا باعث زمین پر سیاروں کی کششیں ہیں۔

ہمیں طریق الشمس کا کوئی معیاری محل لینا چاہئے تاکہ دوسری تاریخوں پر اس کے محل کا حوالہ اس معیاری محل کے ذریعہ دیا جاسکے۔ اس مقصد کے لیے ہم وہ بڑا دائرہ لیتے ہیں جس پر طریق الشمس<sup>۱۸۵۰</sup> کے آغاز میں منطبق ہوا تھا فرض کرو کہ یہ بڑا دائرہ<sup>(۱۸۵۰)</sup> فرض کرو کہ (شکل ۵۸)۔ فرض کرو کہ (۱۸۵۰) میں طریق الشمس کا محل فرض کیا ہے۔ فرض کرو کہ<sup>(۱۸۵۰)</sup> کے آغاز میں خط استوا کا محل ڈا ہے اور فرض کرو کہ وقت ۱۸۵۰+ ت پر خط استوا، قمر شمسی استقبال کی وجہ سے ڈا تک حرکت کر چکا ہے۔ فرض کرو کہ ایک ستارہ<sup>(۱۸۵۰)</sup> سے فرض کرو کہ اور فرض کرو کہ<sup>(۱۸۵۰)</sup> سے فرض کرو کہ اور ڈا کے نقطہ تقاطع د سے فرض کرو کہ<sup>(۱۸۵۰)</sup> پر عمود د ڈا لایا گیا ہے۔ اب ہمیں حسب ذیل مواد ملتا ہے۔

ت سال میں قمر شمسی استقبال ب د ہے۔

۱۸۵۰+ ت میں اصلی طریق الشمس کا میلان زاویہ د ج ڈا ہے۔

۱۸۵۰+ ت میں ثابت طریق الشمس کا میلان زاویہ د ب ڈا ہے۔

ب ج چونکہ خط استوا پر وہ فاصلہ ہے جس میں سے عقدہ ت سال میں طریق الشمس کی حرکت کی وجہ سے منتقل ہو چکا ہے اس لیے وہ سیاری استقبال ہے اور اس کی مقدار ۱۳.۵ ت معلوم ہوتی ہے۔

۱۸۵۰+ ت سیاری استقبال کے متعلق اور زیادہ معلومات حاصل کرنے کے لیے نیو کو مپ (New comb) کی کمپیوٹیم آف اسٹریٹل اسٹرانومی کا مطالعہ کیا جائے جس میں سے یہاں متعلقہ مدد کی قیمتیں لی گئی ہیں۔

ج د کو طول بلدیں عام استقبال کہتے ہیں۔ خط استوا اور ظاہری  
طریق شمس کے نقطہ تقاطع کا ثانی الذکر پر ہٹاؤ عام استقبال ہے اور اس کا  
سالانہ اضافہ تباریخ ۱۸۵۰ء سے حسب ذیل ہے  

$$۵۰۶۲۵۳ + ۰۰۰۰۲۲۲۵ = ۰۰۰۰۰۰۰۰$$

اس مقدار کو استقبال کا مستقل کہتے ہیں۔ یہ بہت ہی سستی سے بدلتا  
ہے چنانچہ سن ۱۹۰۰ء میں اس کی قیمت ۵۰۶۲۵۶۴ تھی اور سن ۱۹۰۵ء میں  
۵۰۶۲۶۷۵ ہو گئی۔  
 آج کل استقبال کے مستقل کو ۵۰۶۲۶۷۵ لینا ہمارے مقاصد کے لیے  
کافی صحیح ہے۔

سن ۱۸۵۰ء میں استوا اور ارضی تاریخ کے طریق شمس کے  
درمیان زاویہ (دوری ریموں کو نظر انداز کر کے) حسب ذیل ہے  

$$۲۴۰۰۰ - ۰۰۰۰۰۰۰۰$$

اس کی دوسری رقم کو میلان کی قرنی (Secular) تبدیلی کہتے ہیں۔  
 شکل میں تیزوں کی سمتوں کا مشاہدہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ثابت  
طریق شمس پر اصلی طریق شمس کا نزولی عقدہ نہ رہا ہے اور اس لیے ثابت  
طریق شمس پر اصلی طریق شمس کے صعودی عقدہ کا طول بلد ۸۰° آج  
ہے۔

ستارہ مں کا طول بلد جو سن ۱۸۵۰ء میں د ل تھا سن ۱۸۵۰ء میں  
قرنی استقبال کی باعث ج ل ہو جاتا ہے۔ اس کا عرض بلد یعنی  
مں ل قرنی استقبال سے نہیں بدلتا۔  
 اگر سیاروں استقبال اور قرنی استقبال دونوں کو ملحوظ رکھا جائے  
 تو مں کا طول بلد جو سن ۱۸۵۰ء میں د ل تھا سن ۱۸۵۰ء میں ج ل  
 ہے اور اسی طرح عرض بلد مں ل سے مں ل تک بدلتا ہے۔

## ۵۷۔ صعود مستقیم اور میل کی رقوم میں استقبال اور کیو کیلئے عام ضابطے۔

(۱-۸)

ہم بالعموم یہ مان لیتے کہ طریقی الشمس کا مستوی غیر متغیر رہتا ہے اور یہ کہ طریقی الشمس کے لحاظ سے خط استواء کے محل میں استقبال اور کیو کی باعث سمت تبدیلیاں ہوتی ہیں۔ یہ تبدیلیاں صرف ان طریقوں پر واقع ہوتی ہیں جن کے مطابق کرہ کا ایک براہ دائرہ بدل سکتا ہے یعنی عقدوں کا خط بدلتا ہے اور طریقی الشمس کا میلان بھی بدلتا ہے۔ اگر ان بڑے دائروں میں جن کے لحاظ سے کسی ستارے کے مدار پائے جاتے ہیں کوئی تبدیلیاں ہوں ان تبدیلیوں کی وجہ سے ستارہ کے محدودوں میں بھی تبدیلیاں ہوں گی اگرچہ کم، جیسا کہ اب ہم فرض کریں گے، کرہ سماوی پر ستارہ کے مقام میں فی ابوابی کوئی تبدیلی نہ ہو۔ فرض کرو کہ پہلا محل طریقی الشمس کو خط استواء کے دو محلوں پر غور کرو۔ فرض کرو کہ پہلا محل طریقی الشمس کو ایک اعتدالی نقطہ ۲ پر قطع کرتا ہے اور طریقی الشمس کے ساتھ استس کا میلان سہ ہے۔ فرض کرو کہ دوسرا محل طریقی الشمس کو ایک اعتدالی نقطہ ۲ پر قطع کرتا ہے جو طریقی الشمس پر گھٹنے والے طول بلدوں کی سمت میں قوس گ میں سے حرکت کر چکا ہے اور میلان سہ سے سہ تک بدل چکا ہے (شکل ۵۹)۔

فرض کرو کہ پہلے خط استواء اور اعتدال کے حوالے سے (نظام اول) ایک ستارہ مں کا صعود مستقیم اور میل علی الترتیب عہ اور ضہ ہیں اور دوسرے خط استواء اور اعتدال (نظام دوم) کے حوالے سے اسی ستارے کے محدود عہ اور ضہ ہیں۔

فرض کرو کہ ان دو نظاموں کے حوالے سے ایک دوسرے ستارے کے متناظر محدود عہ، ضہ اور عہ، ضہ ہیں۔ اب چونکہ قوس مں مں کا طول وہی ہے خواہ محدودوں کا کوئی

نظام لیا جائے اس لیے حسب ذیل اساسی مساوات  
جب ضہ جب ضہ + جم ضہ جم ضہ (عہ - عم)

$$= \text{جب ضہ جب ضہ} + \text{جم ضہ جم ضہ} \text{ (عمہ - عم)}$$

حاصل ہوتی ہے جو دفعہ ۱۲ میں استعمال کیجا چکی ہے۔  
اب ہم اس مساوات پر تین ایسی صورتیں لیکر غور کریں گے جن میں  
عم، ضہ اور عم، ضہ فوراً معلوم ہوتے ہیں اور اس طرح استعمال کی تین  
مساواتیں حاصل کریں گے۔  
اگر دوسرا ستارہ سن، ۲ پر ہو تو اس کے محدود نظام اول  
میں حسب ذیل ہیں

$$\begin{aligned} \text{عم} &= ۰, \text{ضہ} = ۰ \\ \text{اسی ستارہ کے محدود دوسرے نظام میں مساواتوں} \\ \text{جب ضہ} &= \text{جب ک جب سنہ} \\ \text{جم ضہ جب سنہ} &= \text{جب ک جم سنہ} \\ \text{جم ضہ جب سنہ} &= \text{جم ک} \end{aligned}$$

سے ملتے ہیں۔

ان قیمتوں کو اساسی مساوات میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم ضہ جم عم} = \text{جب ک جب سنہ جب ضہ} \\ + \text{جم ک جم ضہ جم عم} + \text{جب ک جم سنہ جم ضہ جب عم} \dots (۱)$$

اسی طرح سن کو ۲ پر لینے سے حاصل ہوتا ہے  
جم ضہ جم عم = جب ک جب سنہ جب ضہ + جم ک جم ضہ جم عم

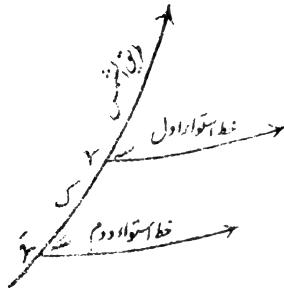
$$- \text{جب ک جم سنہ جم ضہ جب عم} \dots (۲)$$

بالآخر فرض کرو کہ یہ دوسرا ستارہ سن طریق الشمس کے قطب  
سے تو نظام اول میں اس کے محدود ہیں

$$\text{عم} = ۹۰, \text{ضہ} = ۰$$

اور نظام دوم میں

$$\text{عہ} = ۲۷۰^\circ \text{، ضہ} = ۹۰^\circ - \text{سہ}$$



شکل (۵۹)

اسی مساوات میں ان قیمتوں کو داخل کرنے سے حاصل ہوتا ہے  
جب ضہ جم سہ - جم ضہ جب سہ جب عہ

= جب ضہ جم سہ - جم ضہ جب سہ جب عہ (۳)  
اس طرح عہ ضہ کو عہ ضہ اور ضروری استقامات ک سہ سہ کے ساتھ ملانے والی تین عام مساواتیں حاصل ہوتی ہیں -  
یہ ظاہر ہے کہ مساوات (۳) زبردہ اور غیر زبردہ حروف میں متشاکل ہے اور یہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ (۲) کو (۱) سے کس طرح زبردہ اور غیر زبردہ حروف کے باہمی تبادلہ اور ک کی علامت بدلنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے -

اگر معلومہ مقادیر عہ ضہ ہوں تو (۱) (۲) (۳) سے ہم  
جب ضہ اور جم ضہ جب عہ کو عہ ضہ کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں  
اور اس طرح حسب ذیل تین مساواتوں (۴) (۱) (۵) کو ایک جٹ میں (۱۸۰)  
رکھ سکتے ہیں جس سے عہ ضہ بغیر ابہام کے معلوم ہو سکتے ہیں :-  
جب ضہ = جب ضہ (جم ک جب سہ جب سہ + جم سہ جم سہ)

- جم ضہ جب عہ جب سہ جب ک  
 + جم ضہ جب عہ (جم ک جب سہ جم سہ - جم سہ جب سہ) ... (۳)  
 جم ضہ جم عہ = جب ضہ جب ک جب سہ  
 + جم ضہ جم عہ جم ک  
 + جم ضہ جب عہ جب ک جب سہ جم سہ ..... (۱)  
 جم ضہ جب عہ = جب ضہ (جم ک جب سہ جب سہ - جب سہ جم سہ)  
 - جم ضہ جم عہ جم سہ جب ک  
 + جم ضہ جب عہ (جم ک جم سہ جم سہ + جب سہ جب سہ)  
 اگر عہ ضہ دے گئے ہوں اور عہ ضہ معلوم کرنے ہوں تو اسی طرح  
 حسب ذیل تین مساواتیں داخل ہوتی ہیں :-  
 جب ضہ = جب ضہ (جم ک جب سہ جب سہ + جم سہ جم سہ)  
 + جم ضہ جم عہ جب سہ جب ک  
 + جم ضہ جب عہ (جم ک جب سہ جم سہ - جم سہ جب سہ) ... (۶)  
 جم ضہ جم عہ = جب ضہ جب ک جب سہ  
 + جم ضہ جم عہ جم ک  
 - جم ضہ جب عہ جب ک جم سہ ..... (۲)  
 جم ضہ جب عہ = جب ضہ (جم ک جم سہ جب سہ - جب سہ جم سہ)  
 + جم ضہ جم عہ جم سہ جب ک  
 + جم ضہ جب عہ (جم ک جم سہ جم سہ + جب سہ جب سہ)  
 ..... (۷)  
 استقبال مسموب کرنے میں ک کو بالعموم استفہ رجھوٹا سمجھا جا سکتا  
 ہے کہ اس کی پہلی سے اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز کی جا سکتی ہیں اور نیز ہم لیتے ہیں سہ سہ  
 نمائے (۶) (۲) (۷) ہو جاتے ہیں  
 جب ضہ = جب ضہ + ک جب سہ جم ضہ جم عہ

جم نہ جم عہ = جم نہ جم عہ - ک جب سہ جب نہ - ک جم سہ جم نہ جب عہ  
جم نہ جب عہ = جم نہ جب عہ + ک جم سہ جم نہ جم عہ

ان سے ہمیں باسانی حسب ذیل تقریبی ضابطے حاصل ہوتے ہیں

عہ - عہ = ک جم سہ + ک جب سہ مس نہ جب عہ ..... (۸)

نہ - نہ = ک جب سہ جم عہ ..... (۹)

یہ ضابطے استقبال کے لیے اساسی ضابطے ہیں۔

مثال ۱ - اگر ایک ستارے کا میل اور صعود مستقیم نہ عہ ہوں تو ثابت (۱۸۱)

کر کہ استقبال کی باعث صعود مستقیم میں سالانہ اضافہ قوس کے ثانیوں میں  
۲۰ + ۲۰ مس نہ جب عہ کے بہت قریب ہوگا اور میل میں سالانہ اضافہ  
۲۰ جم عہ ہوگا۔

مثال ۲ - خط استواء کے قطب کی زاویہ زفرائق الشمس کے قطب کے  
گردک ہے، طریق الشمس کی گردش کے فوری محور کا طول بلد کی ہے، اور اس کی  
زاویہ زفرائق عا ہے۔ ثابت کر کہ حوالہ کے مستویوں کی ان تبدیلیوں سے کسی  
ستارے کے صعود مستقیم عہ اور میل نہ میں تبدیلی کی سالانہ شرحیں

م + ن جب عہ مس نہ اور ن جم عہ

پیدا ہوتی ہیں جہاں م = ک جم سہ - عا جب لی قم سہ  
ن = ک جب سہ، جہاں سہ طریق الشمس کے ساتھ استواء کا میل  
اور

مثال ۳ - ثابت کر کہ کرہ سماوی پر کے وہ نقطے جن کے میل ایک

دی ہوئی مدت میں اعتدالوں کے استقبال کی وجہ سے بڑی سے بڑی تبدیلی میں  
گزر تے ہیں ایک بڑے دائرے کی دو قوسوں پر واقع ہوتے ہیں۔ نیز ثابت کر کہ  
وہ نقطے جن کے میل اس مدت کے اختتام پر غیر متغیر رہتے ہیں ایک دوسرے  
بڑے دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔

فرض کر کہ خط استواء کے قطب اس مدت کی ابتدا اور ختم پر قیام ہے  
تو ہندسی طور پر یہ واضح ہے کہ اس مدت میں استقبال کی باعث میل کی بڑے سے بڑی



کج تبدیلی تو س ق ق کے مساوی ہے اور یہ کہ دو ستارے جو اس تبدیلی میں سے گزرتے ہیں ق ق میں سے گزرنے والے بڑے دائرے پر واقع ہیں اور تو س ق ق اور اس کے تحت قدرتی قوس کی حدود سے باہر ہیں۔ وہ ستارے جن کے میل اس مدت کے ختم پر غیر متغیر رہتے ہیں اس بڑے دائرہ پر واقع ہیں جو تو س ق ق کی علی القوائم تصنیف کرتا ہے۔

مثال ۴۔ اگر ایک ستارہ دائرہ انقلاب میں واقع ہو تو ثابت کرو کہ وہ میل میں استقبال نہیں رکھتا۔ نیز ثابت کرو کہ دائرہ اعتدالین پر کے سب نقطے صعود مستقیم اور نیز میل میں ایک ہی استقبال رکھتے ہیں۔

مثال ۵۔ ثابت کرو کہ اگر کسی ایک ستارہ ہو جس کے صعود مستقیم استقبال نہیں ہے اور اگر خط استواء اور طریق الشمس کے قطب علی الترتیب ق اور ک ہوں تو س ق اور س ک علی القوائم ہونگے۔

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ وہ سب ستارے جنکا صعود مستقیم استقبال کی وجہ سے فی الحال نہیں بدلتا ایک ناقصی مخروط پر واقع ہوتے ہیں جو خط استواء اور طریق الشمس کے قطبوں میں سے گزرتا ہے۔

شرط ہے، دیکھو (۸)

جم سہ + جب سہ مس ضہ جب عہ = .

اگر ہم رکھیں لا = رجم عہ جم ضہ

ما = رجب عہ جم ضہ

ی = رجب ضہ

اور ر' عہ ضہ کو سا ق کر لی تو مخروط کی مساوات حاصل ہوتی ہے

ما ی جب سہ + (لا + ما) جم سہ = .

مثال ۷۔ ثابت کرو کہ ان سب ستاروں کے لیے جن کے میل میں

(خط استواء کے عقدہ کی طریق الشمس میں حرکت کی وجہ سے) تغیر کی شرح اپنی

قیمت (رکھتی ہے صعود مستقیم میں تغیر کی شرح) (اسی سبب سے)

ہاں سہ طریق الشمس اور خط استواء کا درمیانی زاویہ ہے۔

مثال ۸۔ ضابطوں (۱) (۲) (۳) سے ثابت کرو کہ سہ اور ک کے لحاظ سے عہ قصہ کے تفریق سروں کے لیے حسب ذیل جملے حاصل ہوتے ہیں:-

$$\frac{\text{جف عہ}}{\text{جف سہ}} = - \text{مس ضہ جم عہ} \quad \text{جف ضہ} = \text{جب عہ} \quad \text{جف سہ}$$

$$\frac{\text{جف عہ}}{\text{جف ک}} = \text{جم سہ} + \text{جب سہ مس ضہ جب عہ} \quad \text{جف ضہ} = \text{جب سہ جم عہ}$$

(۶) کو سہ کے لحاظ سے تفریق کرنے اور عہ ضہ ک سہ کو مستقل سمجھنے سے مساوات (۷) کی بنا پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم ضہ} \frac{\text{جف ضہ}}{\text{جف سہ}} = \text{جم ضہ جب عہ}$$

اس لیے صورت ضہ = ۹۰ کو خارج کرنے سے

$$\frac{\text{جف ضہ}}{\text{جف سہ}} = \text{جب عہ}$$

(۲) کو سہ کے لحاظ سے تفریق کرنے سے

$$\text{جم ضہ جب عہ} \frac{\text{جف عہ}}{\text{جف سہ}} + \text{جب ضہ جم عہ} \frac{\text{جف ضہ}}{\text{جف سہ}} = ۰$$

اس لیے  $\frac{\text{جف ضہ}}{\text{جف سہ}}$  کی بجائے جب عہ رکھنے سے

$$\frac{\text{جف عہ}}{\text{جف سہ}} = - \text{مس ضہ جم عہ}$$

(۶) کو ک کے لحاظ سے تفریق کرنے سے

$$\text{جم ضہ} \frac{\text{جف ضہ}}{\text{جف ک}} = \text{جب سہ} - (\text{جب ضہ جب ک جب سہ} + \text{جم ضہ جم عہ ک} - \text{جم ضہ جب عہ ک جب سہ})$$

$$= \text{جب سہ جم ضہ جم عہ} \quad \text{جف ضہ} = \text{جب سہ جم عہ} \quad \text{جف ک}$$

اس لیے

بالآخر (۳) کو کک کے لحاظ سے تفرق کرنے اور  $\frac{\text{جف ضہ}}{\text{جف ک}}$  کی محصلہ بالا قیمت

کو درج کرنے سے

۰ = جم ضہ جم سہ جب سہ جم عہ + جب ضہ جب سہ جب عہ جب سہ جم عہ

- جم ضہ جب سہ جم عہ  $\frac{\text{جف عہ}}{\text{جف ک}}$

اس لیے  $\frac{\text{جف عہ}}{\text{جف ک}} = \text{جم سہ} + \text{جب سہ مس ضہ جب عہ}$

مثال ۹ - ثابت کرو کہ استقبالی حرکت کے باوجود سماوی خطا استواء ہمیشہ دو ثابت چھوٹے دائروں کو لمس کرتا ہے۔

مثال ۱۰ - اگر میدان میں تبدیلی مفسر ہو اور ۷ میں کوئی تبدیلی نہ ہو تو ثابت کرو کہ

جم عہ جم ضہ = جم عہ جم ضہ

جب عہ جم ضہ = جب عہ جم ضہ جم مفسر سہ - جب ضہ جب مفسر سہ

جب ضہ = جب عہ جم ضہ جب مفسر سہ + جب ضہ جم مفسر سہ

جہاں عہ ضہ علی الترتیب ایک ستارہ کے وہ صعود مستقیم اوزیل ہیں جو اس تبدیلی سے متاثر ہیں اور عہ ضہ وہ صعود مستقیم اوزیل جو اس تبدیلی سے غیر متاثر ہیں۔

مثال ۱۱ - فرض کرو کہ ایک دی ہوئی ان پر ایک ستارہ کا صعود مستقیم اوزیل

عہ ضہ میں استقبال کا انتقال ہے اور طریق الشمس کا میدان سہ۔

اگر جلد جب سہ جب ضہ + جم سہ جم ضہ جب عہ کو آئے اور جملہ

جم عہ جم ضہ کو ب سے بقید کیا جائے تو ت سال بعد اسی ستارے کے لیے ان جملوں کی قیمتیں ہوں گی

(جم ک ت + ب جب ک ت اور ب جم ک ت) - (ب جب ک ت

اس مدت میں سیلی ضہ سے ضہ ہو جائے تو

ضہ = جب سہ { (۱-ب ک ت) - ب جب ک ت }

ہم دیکھتے ہیں کہ یہاں تک استقبال کا تعلق ہے جملہ  
(جب سہ جب ضہ + جم سہ جم ضہ جب عم) + (جم عم جم ضہ)  
ایک غیر متغیر ہے اور یہ دیکھنا آسان ہے کہ یہ جملہ ہمیشہ عرض بلد کی جیب النما  
مرح ہوتا ہے۔ جملہ

جب ضہ جم سہ۔ جم ضہ جب عم جب سہ  
بھی جو عرض بلد کی جیب ہے بلاشبہ ایک غیر متغیر ہے اور اس وجہ سے ضابطہ  
(۳) فوراً لکھ لیا جاسکتا تھا۔

مثال ۱۲۔ ثابت کرو کہ استقبال کی باعث ایک ستارہ کا صعود و مستقیم  
جو طرّق الشمس کے قطب سے  $\frac{1}{2}$  ۲۳ سے زیادہ فاصلہ پر ہو نام ممکن تبدیلیوں  
الذی سے کا لیکن اگر ستارہ کا صعود و مستقیم طرّق الشمس کے قطب سے  $\frac{1}{2}$  ۲۳ سے  
کم فاصلہ پر ہو تو وہ ہمیشہ ۱۲ کھنڈوں سے بڑا ہوگا۔

اگر  $\frac{1}{2}$  = کس  $\frac{1}{2}$  کہ تو ساداتوں (۲) اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے  
لا (۱) جب ضہ جم سہ + جم ضہ جب عم ۲ سہ سہ عم جم عم عم  
۲۔ لا (جم ضہ جم عم سہ + کس عم جب ضہ جب سہ + کس عم جم ضہ جب عم جم سہ)  
سہ سہ عم جم ضہ جم عم ۲ سہ سہ عم ضہ جب عم = ۰

اس درجہ کی جدولوں کے تفسیعی ہونے کی شرط یا آسانی حسب ذیل ظاہر  
ہوتی ہے

کس عم جم ۲ سہ + جم سہ۔ جب ۲ سہ <  
یہاں یہ ستارہ کا عرض بلد ہے اگر یہ > (۹۰۔ سہ) تو عم کی ہر قیمت  
کے جواب میں ک کی ایک حقیقی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔  
نیز مثال (۱۱) سے حاصل ہوتا ہے

جب ضہ جم سہ۔ جم ضہ جب عم جب سہ = جب ۲ سہ  
اگر یہ < (۹۰۔ سہ) تو جب عم ہمیشہ منفی ہونا چاہئے۔

مثال ۱۳۔ لا کا محور اعتدال رجب میں سے گذرتا ہے، ما کا محور  
خط استوا کے متوازی میں ہے اور محور لا پر عمود ہے، ی کا محور زمین کا قطبی محور

فرض کرو کہ ان قائم محوروں کے حوالہ سے ایک ستارہ کے محدودا، ما، ی ہیں۔  
مان لو کہ طریق الشمس ثابت ہے اور استقبال کو طریق الشمس کے قطب کے گرد  
خط استواء کے قطب کی گردش سے تعبیر کیا جاسکتا ہے جس کی زاویہ شرح قی ہے  
فرض کرو کہ ت سال کے وقفہ کے بعد اس ستارہ کے محدود محوروں کے نئے محلوں  
کے حوالہ سے ضا، عا، طا ہیں۔

ثابت کرو کہ محدودوں کے ان دو جٹوں کے درمیان حسب ذیل روابط ہیں  
ضا = لاجم ق ت - ماجم سہ جب ق ت - ی جب سہ جب ق ت  
عا = لاجم سہ جب ق ت + ماجم سہ ق ت + جیاسہ + ی جم سہ جب سہ (جم ق ت - ۱)  
طا = لاجب سہ جب ق ت + ماجم سہ جب سہ (جم ق ت - ۱) + ی (جیاسہ جم ق ت + جم سہ)  
جہاں سہ طریق الشمس کا میلان ہے۔

$$\begin{aligned} \text{چونکہ} \quad & \text{لا} = \text{جم ضہ جم عہ} \quad \text{ضا} = \text{جم ضہ جم عہ} \\ & \text{ما} = \text{جم ضہ جب عہ} \quad \text{عا} = \text{جم ضہ جب عہ} \\ & \text{ی} = \text{جب ضہ} \quad \text{طا} = \text{جب ضہ} \end{aligned}$$

(۱۸۳)

اس لیے کہ ق ت رکھنے اور سہ = سہ فرض کرنے سے مطلوبہ نتیجہ مساواتوں  
(۲)، (۶)، (۷) سے فوراً حاصل ہوتے ہیں۔

\* مثال ۱۴۔ یہ فرض کر کے کہ ایک مدار کا قطب یکساں رفتار سے ایک  
چھوٹے دائرہ میں حرکت کرتا ہے معلوم کرو کہ کون سے بڑے دائروں پر عقدوں  
کی حرکت (۱) یکساں ہے (۲) مسلسل لیکن متغیر ہے (۳) اتسہازی ہے اور ثابت  
کرو کہ آخری صورت میں عقدہ کی راست حرکت ربعی حرکت کی بہ نسبت زیادہ وقت  
لیتی ہے۔

فرض کرو کہ سہ (۹۰°) اس دائرہ کا نصف قطر ہے جو متحرک قطب قی ثابت  
نقطہ قی کے گرد مرسوم کرتا ہے تو دو بڑا دائرہ ج جس کا قطب قی ہے دائرہ ج کو  
جس کا قطب قی ہے مستقل زاویہ سہ پر قطع کرتا ہے۔ عقدہ یکساں طور پر  
حرکت کرتا ہے اور ج کے سوا کوئی اور بڑا دائرہ نہیں ہے جس پر عقدہ یکساں  
گتتا ہو۔ ج کے متساوی دو چھوٹے دائرے ج اور ج پر گتتا ہو۔

ج کی مخالف سمتوں میں ہوں اور اس سے مستقل فاصلہ سے پرواقع ہوں۔ اب چونکہ ج پر کا کوئی نقطہ ج سے سے زیادہ فاصلہ پر نہیں ہو سکتا اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ج پر کے نسب نقطے ج اور ج کے درمیانی منطقہ سے واقع ہونے چاہئیں۔ اس لیے کسی دوسرے دائرہ و سے منقطع ہونے والے ج کے تمام ممکن عقدے اس منطقہ سے میں محدہ دیں۔



شکل (۶۰)

دائرہ ج، ج اور ج کو جن نقطوں پر مس کرتا ہے اپنے متصل محصل سے ان نقطوں پر منقطع ہوتا ہے۔ اس لیے اگر وہ عقدہ جس میں دائرہ ج کسی اور دائرہ و کو قطع کرتا ہے مقیم ہو تو یہ عقدہ ج یا ج پرواقع ہونا چاہئے۔ اگر وہ عقدہ جس میں ثابت دائرہ و ج سے منقطع ہوتا ہے مسلسل آگے بڑھے تو اسے کسی نقطہ پر مقیم نہ ہونا چاہئے اور اس لیے و کو ج اور ج کے ساتھ کوئی حقیقی نقاط تقاطع نہیں رکھنے چاہئیں اس لیے اس منطقہ سے کے اندر محدود ہونا چاہئے۔

اگر وہ منطقہ سے کے اندر محدود نہیں ہے تو عقدہ سے صرف اہتر از کر سکتے ہیں کیونکہ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں عقدہ منطقہ سے کے اندر واقع ہوتے ہیں لہذا یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ و کے ان حصوں میں داخل نہیں ہو سکتے جو سے کے باہر ہیں اور اس لیے ہر عقدہ کو ان دو توسوں میں سے ایک میں اہتر از کرنا چاہئے جو و پر سے سے منقطع ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ ج اور ج کے ساتھ ج کے نقاط تماس ت اور ت

ہیں اور فرض کرو کہ ۹ اور ۶ وہ نقطے ہیں جن میں ۷ کی ایک قوس ج اور ج میں ختم ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ وہ اسے ورتک کھینچی ہوئی تو اس اُس سمت کے ساتھ ایک مادہ زاویہ بناتی ہے جس میں جہ پر واقع شدہ ج کے عقدے حرکت کر رہے ہیں۔ جب تہ و پر منطبق ہوتا ہے تو اُس عقدہ کی راست حرکت و و پر شروع ہو رہی ہوگی۔ لیکن یہ راست حرکت اُس وقت تک ختم نہیں ہوگی جب تک کہ تہ و پر منطبق نہ ہو جائے اور اس کے لیے ج کو نصف سے زیادہ حصہ میں سے گھمانا پڑے گا یعنی راست اہتزاز ج کے کل دور کا نصف سے زیادہ حصہ لیتا ہے۔ لیکن تہ و جب و سے گزر جاتا ہے تو رجعی حرکت شروع ہوتی ہے اور یہ اُس وقت ختم ہوگی جبکہ تہ و پھر و پر پہنچ جائے اور اس لیے مکمل گردش کے نصف سے کم ضرورت ہوگی۔

ہم اس مسئلہ کی تحقیق اس طرح بھی کر سکتے ہیں :- فرض کرو کہ  $h$  فہ (شکل ۶۰) دائرہ ج ہے،  $h$  ن دائرہ ج ہے اور ف ن دائرہ و۔ تب مثلث ف ن  $h$  ن سے حسب دفعہ اضابطہ (۶) حاصل ہوتا ہے

جم عہ جب ک + جب عہ جم ک جم عہ جم سہ جب عہ جم سہ جب سہ = ..... (۱)  
عہ اور ک کی متناظر تبدیلیاں معلوم کرنے کے لیے ہم سہ اور سہ کو مستقل سمجھ کر  
تفریق کرتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

مف عہ - جم عہ جم ک - جب عہ جب ک جم سہ

مفک = جب ع جب ک - جم ع جم ک جم سہ + جم ع جم سہ جب سہ

اگر ن ایک مقیم عقدہ ہو تو حجم  $n$  جسم ک۔ جب  $n$  جسم ک جسم سے =۔ یعنی  $n = 0$  جس کے یہ معنی ہیں کہ  $n$  سے ف ہا پر عود ہے جو فی الحقیقت وہی شرط ہے کہ  $n$  ج پر واقع ہونا چاہئے۔ پس ہم معلوم کرتے ہیں کہ حجم ک = مس  $n$  سے اور اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ ہا ایک قوس سے کرتا ہے اور اس اثنا میں عقدہ ج پر کے مقیم عقدے  $n$  مت کرتا ہے۔ شکل میں جو صورت تعبیر کی گئی ہے اُس میں

چونکہ مس سہ م سہ مثبت ہے اس لیے ک  $> ۹۰$  یعنی ۲ ک نصف محیط سے کم ہے، اس لیے امتزازی حرکت میں عقدوں کی جمعی حرکت راست حرکت کی بہ نسبت کم وقت لیتی ہے۔

\* مثال ۱۵ - وہ وقفہ جو ایک دن ہوئے نصف النہار پر ایک ہی ستارہ کے دو متصل دوروں کے درمیان ہوتا ہے استقبال کی وجہ سے ایک اوسط کو بی یوم سے مختلف ہوگا۔ اگر ستارہ کا عرض التمام قطب کے عرض التمام سے کم ہو تو ثابت کرو کہ یہ فرق معدوم ہوگا جبکہ قطب اور ستارہ کے طول بلدوں کا

فرق جَم' مس (ستارہ کا عرض التمام) ہو۔  
مس (قطب کا عرض التمام)

\* مثال ۱۶ - اگر ایک دوہرے تارے کے چھوٹے جزو ترکیبی کا زاویہ محل لمحہ ثابت پر م ہو تو ثابت کرو کہ اگر صرف استقبال کا اثر ملحوظ رکھا جائے تو کسی دوسرے لمحہ ت پر زاویہ محل م مساوات

$$m = m' + ۰.۳۳۲۲ (ت - ت')$$

سے حاصل ہوگا جہاں اس زوج کے صد زتارے کا صعود مستقیم اور میل عہ ضہ ہیں اور ت اور ت' کو سالوں میں بیان کیا گیا ہے۔

۵۸ - راس المحل کی حرکت طریق الشمس پر۔

استقبال اور کب کی وجہ سے خط استواء اور طریق الشمس کا نقطہ تقاطع جسے ہم راس المحل (۲) کہتے ہیں طریق الشمس پر (جسے ثابت فرض کر لیا گیا ہے) متحرک ہوتا ہے۔ اس لیے اس کا محل وقت کا ایک تفاعل ہے اور اگر طریق الشمس پر کے کسی ثابت نقطہ و سے ۲ کا فاصلہ ص ہو تو ہم لکھ سکتے ہیں

ص = ل + ب + ت + د  
اس مساوات میں ت وہ وقت ہے جو کسی متقبل آن سے شمار کیا گیا ہے اور ل اور ب مستقل ہیں اور د میں صرف دوری نہیں شامل ہیں۔ (۱۸۶)



ان رقبوں میں تہ زادیوں کے جملوں میں آتا ہے جو د میں صرف ان کی جنوب اور جنوب تمام کے ذریعہ داخل ہوتے ہیں۔ اس طرح مقداروں ب ت اور د کے درمیان ایک بنیادی فرق ہے چنانچہ اول الذکر مقدار وقت کی نسبت سے غیر محدود اضافے کی قابلیت رکھتی ہے اور اس میں ب دراصل استقبال کا مستقل ہے۔ برخلاف اس کے د کی قیمت حدود کے درمیان تنقید ہے چنانچہ وہ کسی خاص مقدار ب سے بڑی نہیں ہو سکتی اور نہ د سے کم ہو سکتی ہے جہاں د ایک محدود مقدار ہے۔ مقدار د وہ کبوتر جس میں سے اس یکساں طور پر متحرک محل کے گرد ہتھکڑا ہے جو وہ کبوتر کے موجود نہ ہونے کی صورت میں اختیار کرتا۔

فرض کرو کہ ن ایک نقطہ ہے جو طریق الشمس پر یکساں طور پر حرکت کرتا ہے اور نقطہ و سے اس کا فاصلہ وقت ت پر ل + ب ت سے تعبیر ہوتا ہے۔ ۲ بعض اوقات ن سے آگے ہو گا اور بعض اوقات اس کے پیچھے لیکن فاصلہ ۲ ن ہرگز د سے تجاوز نہیں ہو سکتا۔ ۲ کی حرکت بالواسطہ وہی ہوگی جو ن کی ہے اور اس لیے ن کو اعتدال زینج کا اوسط نقطہ سمجھا جاسکتا ہے جو طریق الشمس پر یکساں طور پر حرکت کرتا ہے اور جس کے جس قرب میں اس اصل ہمیشہ پایا جاتا ہے۔ چونکہ کسی ستارے کے طول بلد کو طریق الشمس پر ۲ سے پیمائش کرتے ہیں اس لیے یہ ظاہر ہے کہ یہ طول بلد ۲ کی حرکت کی وجہ سے بالعموم بڑھتے رہنا چاہئے اگرچہ خود ستارہ ذاتی حرکت سے محروم ہو۔ عدد رقمی عددی قیمتیں داخل کرنے سے طریق الشمس پر کسی ستارے کے اصلی طول بلد کے لئے حسب ذیل جملہ مائل ہوتا ہے :-

۱۔ علامت مثبت کی ایک کائنات نے جو مقام پر اس ماہ مئی ۱۹۶۷ء منعقد ہوئی تھی اس کی مندرجہ قیمتیں اختیار کی تھیں اور اب تک یہ بحری جہتہری میں ہیں۔

لہ = لہ ۲۶ + ۵۰، ت - ۲۳۵ + ۷۷، آجب ج - ۲۷، آجب ۲

جہاں

لہ، ن کے حوالہ سے شروع سال پر ستارہ کا طول بلد ہے،  
ت، سال کی وہ کسر ہے جو زیر بحث وقت تک گزر چکی ہے،  
ج، چاند کے صعودی عقدہ کا ارض مرکزی طول بلد ہے،  
لی، سورج کا اوسط طول بلد ہے جو ہمارے موجودہ مقصد کے لیے  
کافی صحت کے ساتھ سورج کا اصلی ارض مرکزی طول بلد سمجھا جا سکتا ہے۔ یہ  
لہ کے اس جملہ میں دوسری رقم استقبال کی وجہ سے ہے۔ یہ رقم  
(۱۸۷) ستارے کے طول بلد میں سالانہ اضافہ ۵۰، ۲۶ کے جواب میں ہے۔ چونکہ  
اس رقم میں ت بطور ایک جزو ضربی کے شامل ہے اس لیے وہ غیر محدود  
اضافہ قبول کرنے کی اہلیت رکھتی ہے اور اس لیے وہ لہ کے جملہ کی تین متغیر  
رقموں میں سے زیادہ اہم ہو سکتی ہے۔

تیسری رقم میں ج آتا ہے جو چاند کے صعودی عقدہ (طریق الشمس) کا  
طول بلد ہے۔ اس رقم سے اس الجملہ کا طول بلد (۲۳۵ + ۷۷) سے (- ۲۳۵ + ۷۷)  
تک اپنی اوسط قیمت کے کسی ایک جانب متغیر ہو سکتا ہے۔ چونکہ عقدہ  
طریق الشمس کے گرد تقریباً  $\frac{1}{18}$  سال میں گردش کر لیتے ہیں اس لیے کب  
اس امر کا باعث ہوتا ہے کہ ۲ اپنے اوسط مقام سے تقریباً ۹ سال تک  
آگے رہتا ہے اور پھر تقریباً ۹ سال تک اپنے اوسط مقام سے پیچھے۔ لہ  
کے جملہ کی آخری رقم سورج کی باعث طول بلد میں کب ہے، اسے لی کی قوم  
میں بیان کیا گیا ہے جو سورج کا اوسط طول بلد ہے، اس رقم کا دور تقریباً  
چھ ماہ ہے۔

طول بلد پر اثر رکھنے کے ماسوا کب طریق الشمس کے میلان پر دوری  
اثر بھی، لکھتا ہے، اس لیے کسی دئے ہوئے وقت پر اصلی میلان معلوم  
کرنے کے لیے شروع سال کے اوسط میلان میں ۲۱، ۹، جم ج + ۵۵، جم ج + ۲  
کا اضافہ کرنا چاہئے۔ یہاں یہ یاد دلانا ضروری ہے کہ سیارہ دی استقبال



اس وقفہ میں طول بلد میں استقبال ۸ و ۲۴ ہے اور کبو کی رقبہ علی الترتیب  
- ۱۷۱۰ اور ۳۰۳ ہیں اس لیے جواب ۸۰ ہے۔ اسی طرح میلان  
۲۳ ۲۷۰۹۶ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۳ - ثابت کرو کہ آغاز سال ۱۹۰۹ء سے طول بلد میں استقبال  
بتاریخ ۲ نومبر ۱۹۰۹ء ۲۲۱۰ ہے اور کبو - ۸۰۳ ہے یہ دیا گیا ہے کہ ل = ۲۲۶۱۱  
اور ج = ۶۸۶۰

مثال ۴ - اگر سنہ ۱۹۰۹ء میں طریق الشمس کے میلان کی اوسط قیمت  
۲۳ ۲۷۰۹۶ ہو تو ثابت کرو کہ بتاریخ ۱۰ جون ۱۹۰۹ء اس کی نکلا ہری قیمت  
۲۳ ۲۷۰۹۶ ہوگی جبکہ ج = ۲۶۱۶ اور ل = ۲۸۶۲ -

\* مثال ۵ - اگر طریق الشمس کے میلان کے کبومف سہ کو زیادہ  
مکمل جملہ (بحری جنتری ۱۹۱۰ء صفحہ ۵)

مف سہ = ۹۲۱۰ + ج - ۹۰۰ جم ج ۲ ج ۱۵۵۱ + جم ل ۱  
- ۹۰۰۹ جم ل - ۲۸۶۲ + ۲۰۲۲ جم ج ۳ + ۲۸۶۲  
سے محسوب کیا جائے تو ثابت کرو کہ بتاریخ یکم مئی سنہ ۱۹۰۹ء میلان کا کبو + ۲۹۷ ہے  
جبکہ یہ دیا گیا ہو کہ چاند کے صعودی عقدہ کا طول بلد ج = ۲۸۶۲ اور سہ ج کا  
اوسط طول بلد ل = ۳۸۶۸ -

\* مثال ۶ - اگر طول بلد کے کبومف ل کو زیادہ مکمل جملہ

مف ل = ۲۳۳۵ + ج - ۲۰۹ ج ۲ ج ۲۷۰ - ج ۱  
+ ۱۰۷ ج ل - ۲۸۶۲ + ۲۰۲۲ ج ۳ + ۲۸۶۲  
سے محسوب کیا جائے تو ثابت کرو کہ بتاریخ ۲۷ دسمبر سنہ ۱۹۰۹ء اس کی قیمت - ۱۵۶۳۷  
ہے یہ دیا گیا ہے کہ ج = ۶۶۷۰ اور ل = ۲۷۵۳۳ -

\* ۵۹ - غیر تابع یومی اعداد - اگر کسی ستارے کی کوئی ذاتی حرکت

نہی ہو جیسا کہ ہم فی الحال فرض کریں گے تو بھی اس کے محذور استقبال اور کبو  
کی باعث مسلسل بدلتے رہنے چاہئیں۔ اب ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ طریق الشمس

ایک ثابت دائرہ ہے اور اوسط اعتدالی نقطہ طریقی الشمس پر یکساں حرکت کرتا ہے اور اس لیے اس کا اوسط فاصلہ اس محل کے نقطہ سے صفر ہے۔ اوسط خط استوا پنج درجے پر طریقی الشمس کو اوسط اعتدالی نقطہ پر قطع کرتا ہے اور سب تشریح بالا طریقی الشمس کے ساتھ زاویہ  $۲۳^{\circ} ۵۸' ۲۰''$  تا  $۲۶^{\circ} ۵۸' ۲۰''$  (ت۔ ۱۹۱۰)

کامیلان رکھتا ہے۔ کسی ستارہ کے اوسط معبود مستقیم اور میل سے اس ستارہ کا وہ معبود مستقیم اور میل سمجھا جائے گا جو آغاز سال پر اوسط خط استوا کے حوالہ سے لئے گئے ہوں۔ اب ہمارے سامنے یہ مسئلہ ہے کہ کسی خاص دن کسی ستارہ کے ظاہری محدود عہہ کیسے کیا ہیں جبکہ اس کے محدود عہہ اور ضہ اس سال کے لئے دئے گئے ہوں جس میں یہ دن آتا ہے۔

مطلوبہ مساواتیں دفعہ ۵ کے عام ضابطوں (۶)، (۲)، (۷) سے حاصل ہوں گی اور موجودہ مقصد کے لیے ک اور سہ سے جھوٹی تبدیلیاں سمجھی جاسکتی ہیں جن کے مربع یا حاصل ضرب نظر انداز کئے جاسکتے ہیں۔ ان حالات کے تحت محول بالا مساواتیں مساواتوں

جب ضہ = جب ضہ + جب ک جب سہ جم ضہ جم عہ + جب (سہ - سہ) جم ضہ جب عہ جم ضہ جم عہ = جم ضہ جم عہ - جب ک جب سہ جب ضہ - جب ک جم سہ جم ضہ جب عہ جم ضہ جب عہ = جم ضہ جب عہ + جب ک جم سہ جم ضہ جم عہ - جب (سہ - سہ) جب ضہ میں تحویل ہوتی ہیں اور ان سے حسب ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

جم ضہ جب (عہ - عہ) = جب ک (جم سہ جم ضہ + جب سہ جب ضہ جب عہ) - جب (سہ - سہ) جب ضہ جم عہ

$\frac{1}{2}$  (ضہ - ضہ) = جب ک جب سہ جم عہ + جب (سہ - سہ) جب عہ عہ - عہ کو وقت کے ثانیوں میں اور ضہ - ضہ اک اور سہ - سہ

نیوں میں بیان کیا جائے تو



ان مساواتوں میں لی سورج کا اوسط طول بلد ہے اور ج خط  
استوا پر چاند کے صعودی عقدہ کا طول بلد ہے (دیکھو صفحہ ۲۸۷)۔  
وقت سال کا وہ کسری حصہ ہے جو آغاز سال سے زیر بحث وقت  
گزر چکا ہے۔

فہرست کی جگہ کی بجائے وہ قیمتیں درج کرنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے جو ضابطوں (۴) سے حاصل ہوتی ہیں اگر ہم ان رقموں کو خارج کر دیں جو کمبو کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں۔ چنانچہ (۳) میں ہم ف کی بجائے ۳۱.۷۳ ت کی بجائے ۲۰.۱۰۵ ت اور گ کی بجائے صفر درج کرتے ہیں اور اس طرح ستارہ عدد ضمیمہ کے لیے ہمیں معلوم ہوتا ہے (حسب مثال دفعہ ۵) کہ صعود مستقیم میں ایک سال کا استقبال ۱۷۷ کو

عہ ۳۰۴۳ + ۳۳۶۱ جب عہ مس فہ

میں تبدیل کرتا ہے

(۴).....

میل میں ایک سال کا استقبال، نہ کو

ضمه + ۱۰۵ + ۲۰ جمعه

میں تبدیل کرتا ہے

بہم استقبال اور کبو کے عام مسئلہ کو حل کر سکتے ہیں، یہ مسئلہ سفیل ہے۔  
اگر سال ت کے آغاز پر ایک ستارہ کا صعود مستقیم اور میل

۱۔ یہ یاد رہے کہ جب زیادہ سے زیادہ صحت مطلوب ہوتی ہے تو سال کی ابتدا اس لمحہ پر لیتے ہیں جبکہ سورج کا اوسط طول بلد ٹھیک ۲۸° ہو۔ سال ۱۹۷۱ء میں یہ طول بلد ۵۰° کے ۵۰° ۴۳' پر یعنی جنوری ۱۹۷۱ء پر رہے۔ مثلاً اور مثلاً تو انی سال کی ابتدا کے گرمیوں اوسط وقت کو معلوم کر نیکے لیے نیرنگل اسٹرنو می کا ضخیم صفحہ ۴۰۳ دیکھو جہاں اور دوسری کارا بھی دی گئی ہیں۔

عبہ، ضبہ دے گئے ہوں تو سال ت کے کسی دن اسی ستارہ کا ظاہری صعود مستقیم اور میل عم، ضبہ معلوم کرو جہاں تک کہ استقبال اور کیو کا تعلق ہے۔

پہلے اس ستارہ کے وہ محدود معلوم کرنے چاہئیں جو سال ت (ت) میں یکم جنوری کو اوسط خط استواء کے حوالے سے تھے۔ یہ محدودے ہوئے اوسط صعود مستقیم اور میل میں حسب ذیل استقبالات جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں :-

(۱۹۱) صعود مستقیم میں استقبال (۳۰.۷۳ + ۳۳۶ شجب عبس ضبہ) (ت) - (ت)؛  
میل میں استقبال (۲۰.۱۰۵ جم عبہ) (ت) - (ت)؛  
اس طرح سال ت میں بتاریخ یکم جنوری اوسط مقام معلوم کر نیکی بعد اس سال کی ایفرس سے ف، گ، گ کی قیمتیں اس مخصوص دن کے لیے جس کے لیے عم، ضبہ مطلوب ہیں معلوم کی جاتی ہیں اور ضابطوں (۳) کو استعمال کیا جاتا ہے تو حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} \text{عم} = \text{عبہ} + (۳۰.۷۳ + ۳۳۶ \text{ شجب عبس ضبہ}) (ت) - (ت) \\ \text{ف} + \frac{۱}{۵} \text{ گ جب (گ + عبہ) مس ضبہ} \\ \text{ضبہ} = \text{ضبہ} + ۲۰.۱۰۵ \text{ جم عبہ} (ت) - (ت) + \text{گ جم (گ + عبہ)} \end{aligned}$$

ان ضابطوں کے اطلاق کی مثال حسب ذیل ہے۔ فرض کرو کہ گرنیوچ پر جوزا (بہ) (Geminorum) کا ظاہری صعود مستقیم اور میل بتاریخ، نو مئی ۱۹۱۷ء بوقت اوسط نیم شب محسوب کرنا مطلوب ہے جہاں تک کہ استقبال اور کیو کا تعلق ہے۔ گرنیوچ کے دوسرے دس سالہ کنڈلاک سے جس میں ۶۸۹۲ ستاروں کے حوالے درج ہیں

۱۷ دیکھو بحری جرنی ماہیت ۱۹۱۷ء جس میں ضلالت اور ذاتی حرکت کے لیے بھی تصحیحات درج ہیں۔ نیز دیکھو گیارہواں باب دفعہ ۹۱۔



یہ معلوم ہوتا ہے کہ سنہ ۱۸۹۰ء میں جوزا (بہ) کا اوسط مقام حسب ذیل ہے:

$$ع = گ ۳۸۰۶۰۳۵۰ ش ضہ = ۲۸ ۱۷ ۲۸۵۴$$

ان قیمتوں کو ۳۰، ۳۰ + ۳۳۶ ش جب عہ مس ضہ میں درج کرنے سے

ہم دیکھتے ہیں کہ سالانہ استقبال ۳۵۷۲۷ ش ہے، پس چونکہ اس صورت میں  
ت۔ ۱۔ ت۔ بیس سال ہے اس لیے صعود مستقیم میں استقبال سنہ ۱۸۹۱ء  
کے اوسط مقام سے سنہ ۱۸۹۰ء کے اوسط مقام تک ۱۸۵۴۷۲۷ ش ہے۔ اسی طرح  
میل میں سالانہ استقبال ۲۰۱۰۵ جم عہ (= ۸۷۳) ہے اور اس لیے  
۲۰ سال میں اس کی مقدار (۲۰ × ۸۷۳) ہوتی ہے۔ اس طرح معلوم ہوتا  
ہے کہ سنہ ۱۹۱۰ء میں جوزا (بہ) کا اوسط مقام حسب ذیل ہے

$$ع = گ ۳۹۰۶۰۴۹۰ ش ضہ = ۲۸ ۱۷ ۴۱۱۲$$

اب ہمیں وہ تصحیحات عمل میں لانی چاہئیں جن سے اس کا ظاہری  
مقام بتاریخ ۷ نومبر سنہ ۱۹۱۰ء حاصل ہوتا ہے۔ اس دن کے لیے بحری جہتیری  
صفحہ ۲۵۰ سے حاصل ہوتا ہے

ف = ۵۷۵۰۱۵۱۰۹۹ گ = ۳۳۲ ۱۰  
قوس میں عہ کا معادل ۱۱۴ ۵۷۲۷۲۷ ش ہے اس لیے گ + عہ = ۸۷۳  
اور اس لیے گ جب (گ + عہ) مس ضہ = ۳۷۶ ش، پس عہ کی تصحیح ہے ۱۷۵۷۲۷ ش  
۳۷۶ ش = ۲۷۲۱ ش - میل ضہ کے لیے تصحیح ہے گ جم (گ + عہ) = ۷۷۳ -  
بالآخر بتاریخ ۷ نومبر سنہ ۱۹۱۰ء ستارہ کا مظلومہ ظاہری مقام ہے

$$۳۹۰۶۰۵۱۵۱۰ ش ضہ = ۲۸ ۱۷ ۴۱۱۲$$

۰ = پر خط استوا پر کے ایک ستارہ کا صعود مستقیم اوسط

اعتدال کے حوالہ سے عبہ ہو تو اس ستارہ کا اصلی صعود مستقیم وقت (جبکہ ت کو سالوں میں بیان کیا جائے) پر جہاں تنک کہ ۷ کی حرکت کا تعلق ہے حسب ذیل ہوگا :-

عبہ = عبہ + ۳۰۰۳ شت - ۱۶۰۶ جب ج - ۶۰۸ جب ۲ ل

اس ضابطہ میں ۳۶۰۰ سالانہ تبدیلی ہے جو صعود مستقیم میں استقبال کی باعث واقع ہوتی ہے اور پہلی دور قمری وقت پر اوسط صعود مستقیم کو تعبیر کرتی ہیں۔ آخری دور قمری کبوجی وجہ سے ہیں۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ کسی استوائی ستارہ کے صعود مستقیم کے تغیرات اپنی اوسط قیمت سے حدود ۱۶۱۲ ش اور ۱۶۱۲ ش کے درمیان رہتے ہیں۔ جہاں تنک کبوجی خاص رقم کا تعلق ہے ممکنہ تبدیلیوں کا ایک مکمل دور ۱۰ سال میں پورا ہوتا ہے، جیسا کہ قبل ازیں بیان کیا جا چکا ہے۔ یہ وہ مدت ہے جس میں 'ج' بقدر ۶۰ زاویہ کے بڑھتا ہے۔

فرض کرو کہ چاند کے عقدہ کے طول بلد میں اور سورج کے اوسط طول بلد میں یومی تبدیلیاں علی الترتیب مف ج اور مف ل ہیں تو لا میں یومی تبدیلی کبوجی وجہ سے حسب ذیل ہوگی

- ۱۶۰۶ جم ج مف ج - ۱۶۱۲ جم ل مف ل

مف ج اور مف ل کی قیمتیں نیم قطری زاویوں میں تقریباً - ۹۲۰۰۰۰ اور ۱۰۱۶۲ ہیں اور اس لیے ۷ میں یومی تبدیلی قریب قریب

۰۰۱ ش جم ج - ۰۰۳ ش جم ل

کے مساوی ہے۔ اس جملہ کو حدود - ۰۰۴ ش اور + ۰۰۴ ش کے درمیان واقع ہونا چاہئے اور اس لیے کسی کو کبوجی یوم اور اوسط کو کبوجی یوم کے درمیان فرق ۰۰۴ ش سے متجاوز نہیں ہو سکتا اور نہ - ۰۰۴ ش سے گھٹ سکتا ہے۔

ہم نے دفعہ ۲۳ میں کوکبی یوم کی تعریف اُس وقفہ سے کی ہے جو ۲ کے دو متوازی مردوروں کے درمیان ہوتا ہے۔ اب یہ معلوم ہوتا ہے کہ تمام کوکبی یوم ٹھیک ٹھیک مساوی نہیں ہوتے کیونکہ ۲ کی حرکت بالکل یکساں نہیں ہے۔ اس لیے یہ خیال ہو سکتا ہے کہ اوسط کوکبی یوم اور ظاہری کوکبی یوم میں جو ۴ کے دو مردوروں کے درمیان ہوتا ہے اور اس لیے کسی قدر متغیر ہے، امتیاز کرنا چاہئے۔ اس کے ساتھ ہی ہمیں اُس امتیاز کا خیال آتا ہے جو ظاہری شمسی یوم اور اوسط شمسی یوم کے درمیان ہے لیکن فی الحقیقت ان دو صورتوں میں کوئی مماثلت نہیں ہے۔ ایک ہی سال میں دو ظاہری شمسی دنوں کا درمیانی فرق دو کوکبی دنوں کے بڑے سے بڑے درمیانی فرق کا کئی ہزار گنا ہو سکتا ہے (دیکھو صفحہ ۳۳۲)۔

اگر ہمارے پاس ایک نظری طور پر مکمل گھڑی ہو جو بغیر کسی تصحیح کے ۱۸ ۱/۲ سال تک ایسا ٹھیک وقت دے کہ ہر اوسط کوکبی یوم کے ختم ہونے پر اس کی سوئیاں بگ بگ بٹ وقت بتلائیں تو ۲ ۱/۲ سال تک روزانہ مختلف اوقات پر جو ۲۳ گ ۵۹ ۸۶ ۵۸ گ اور ۱۴ ۱ گ کے درمیان

واقع ہوں گے مردور کرے گا۔ لیکن ایسی کوئی کامل گھڑی موجود نہیں ہے اور بہترین گھڑیاں جو موجود ہیں ان میں اکثر مشاہدات کے مقابلہ سے تصحیح کرنی پڑتی ہے، وہ غلطیاں جو ایک تصحیح اور دوسری تصحیح کے درمیان پیدا ہوتی ہیں اور ۴ کی بے قاعدگیوں کی وجہ سے ہیں نظر انداز کی جاتی ہیں کیونکہ وہ خطا کے دیگر ماخذوں کے مقابلہ میں ناقابل قدر ہیں۔ اس لیے ہم کوکبی یوم کی تعریف یہ کرتے ہیں کہ اس کا آغاز، اصلی راس الحمل کے مردور سے

وقت کی پیمائش پر ۲ کی حرکت کے اثر کی تحقیقی حد کی وضاحت  
جون اور ۲۰ جون ۱۹۰۹ء کی صورت لیں گے۔ پہلی تاریخ  
یومر سے کبوتر - ۱۶۰۵ گ اور دوسری تاریخ کے لیے - ۱۶۰۲ گ

حاصل ہوتا ہے۔ خطا کے دیگر ذریعوں کو نظر انداز کرنے سے کبوتر کے تغیر کی شرح اوسطاً ۳۰۰ تا ۴۰۰ فی یوم کے داخل ہے۔ اب یہ ظاہر ہے کہ استفادہ چھوٹی مقدار بمقابلہ ان بڑی تبدیلیوں کے جو گھڑی کی شرح میں اُس کے کل پیرزوں کے نقائص یا آب و ہوا کے اثرات سے پیدا ہوتے ہیں قابل انتقاد نہ ہو سکے گی۔ نیز ۲ کی بے قاعدگی سے جو خطا پیدا ہوتی ہے وہ وقت کے ساتھ ساتھ جمع نہیں ہوتی کیونکہ ۱۸ اکتوبر کو کبوتر پھر ۰.۵ اٹا ہو جاتا ہے اور اس لیے ۱۰ جون سے ۱۸ اکتوبر تک اس سبب سے گھڑی کی شرح کی اوسط ظاہری تبدیلی صفر ہوگی۔

پس گھڑی کی خطا کو اکثر متعین کرتے رہنے سے نہ صرف وہ چھوٹی بے قاعدگیاں دور ہونگی جو گھڑی جیسی مشین میں ناگزیر ہیں خواہ وہ کتنی ہی احتیاط سے بنائی جائے بلکہ ساتھ ہی ہم یہ مان سکیں گے کہ تصحیح کے بعد جو کبوتری وقت گھڑی سے معلوم ہوتا ہے وہ پوری ضروری صحت کے ساتھ اس محل کا ساعتی زاویہ ہے۔

ایک ستارہ کے مقام پر استقبال اور کبوتر کے اثرات کی تحقیق ذیل دوسرے طریقہ سے کرنا مفید ہوگا۔

چونکہ ستارہ کا طول بلد اس محل سے ناپا جاتا ہے اس لیے خط استوا کی استقبالی حرکت ستارہ کے طول بلد کو تبدیل کرے گی لیکن اس کا عرض بلد غیر متغیر رہے گا۔ مثلاً اگر ستارہ کا طول بلد کسی وقت یہ لہ ہو اور اگر اس محل اس طرح حرکت کرے کہ ستارہ کا طول بلد لہ بدل ہو جائے اور ساتھ ہی میلان سے ۴۵° مف سے ہو جائے تو مساواتوں کے حسب ذیل دونظامات حاصل ہوتے ہیں۔ ان میں مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے  $\phi$  اور  $\delta$  کی قیمتیں پہلی آن کے لیے حاصل ہوتی ہیں اور پھر مساواتوں (۴)، (۵)، (۶) سے  $\phi$  اور  $\delta$  مف ضہ ملتے ہیں جو زیر بحث وقفہ میں استقبال کی وجہ سے ان محدودوں کی تبدیلیاں ہیں۔  $\phi$  جب  $\delta$  = جب لہ  $\phi$  بہ  $\phi$  سے۔ جب بہ جب سے ..... (۱)

جم ضد جم عہ = جم لہ جم بہ (۲) .....

جب ضد = جب لہ جم بہ جب سہ + جب بہ جم سہ (۳) .....

جم (ضد + مف ضد) جب (عہ + مف عہ) = جب (لہ + مف لہ) جم بہ جم (سہ + مف سہ)

- جب بہ جب (سہ + مف سہ) ... (۴)

جم (ضد + مف ضد) جم (عہ + مف عہ) = جم (لہ + مف لہ) جم بہ (۵) .....

جب (ضد + مف ضد) = جب (لہ + مف لہ) جم بہ جب (سہ + مف سہ)

+ جب بہ جم (سہ + مف سہ) ... (۶)

ان مساواتوں سے مف عہ اور مف ضد معلوم ہوتے ہیں جبکہ مف لہ اور مف سہ دیے گئے ہوں اور اصل عام ترین صورت میں بغیر کسی ابہام کے حاصل ہوتا ہے۔ لیکن علم ہیئت میں وہ صورت جو سب سے زیادہ عام طور پر مستعمل ہے اس میں یہ چار مقادیر مف لہ، مف سہ، مف عہ، مف ضد سب کی سب چھوٹی مقداریں ہیں اور ہم راست حسب ذیل طریقہ پر عمل جاری رکھتے ہیں:

(۳) کو تفرق کرنے اور جم ضد سے تقسیم کرنے (کیونکہ ضد = ۹۰ کی صورت پر غور کرنے کی ضرورت نہیں ہے) سے اور مختصر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

مف ضد = جم عہ جب سہ مف لہ + جب عہ مف سہ

نیز (۱) کو تفرق کرنے اور جم ضد سے تقسیم کرنے سے

جم عہ مف عہ - مف ضد جب عہ مف ضد = جم عہ جم سہ مف لہ - مف ضد مف سہ

اس طرح حسب ذیل نتیجے حاصل ہوتے ہیں جن سے صعود مستقیم اور میل پر اثرات اکثر مقاصد کے لیے کافی صحت کے ساتھ محسوب

ہیں۔ اہل محل کا محل طریق اشمس پر اس طرح ہٹے کہ سب طول بلد

مقدار مف لہ کے بڑھ جائیں اور اگر میلان سہ میں بعد چھوٹے

زاویہ مف سہ کے اضافہ ہو تو کسی ستارہ کے صعود مستقیم اور میل میں تناسل  
تبدیلیاں مف عہ اور مف ضہ، مساواتوں  
مف عہ = (جم سہ + جب عہ مس ضہ جب سہ) مف لہ۔ مس ضہ جم عہ مف سہ  
مف ضہ = جم عہ جب سہ مف لہ + جب عہ مف سہ  
سے ملیں گی۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ کسی دئے ہوئے دن میں جن ستاروں کے میل  
استقبال کی وجہ سے بڑھ جاتے ہیں اور جن کے میل استقبال کی وجہ سے گھٹ جاتے  
ہیں ان دونوں کے درمیان خط فاصل ایک بڑا دائرہ ہے جس پر کے ستارے  
اُس دن میل میں کوئی استقبال نہیں رکھتے۔

کیونکہ اگر جم (گ + عہ) = تو وہ سب ستارے جن کا صعود مستقیم  
۹۰۔ گ یا ۲۴۰۔ گ ہے میل میں استقبال کی وجہ سے نہیں بدلتے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ غیر تالیغی یونی اعداد سے کس طرح طریقاً شمس کا  
میلان آسانی کے ساتھ محسوب کیا جاسکتا ہے۔

دفعہ ۵۹ کی مساوات کی رو سے گ جب گ = (سہ - سہ) اور  
اس لیے سہ = سہ - گ جب گ

مثلاً بتاریخ ۲ مارچ ۱۹۱۱ء بحری جنتری صفحہ ۲۴۵ سے یہ حاصل ہوتا  
ہے کہ لوک گ = ۲۳۲ ۰۶ اور گ = ۲۴۳ ۲۹ اس لیے گ جب گ

= ۲۴۴ ۴۴ اور چونکہ اوسط میلان بابتہ ۱۹۱۱ء (بحری جنتری صفحہ ۱)  
۲۳ ۲۴ ۵۸ ۲۴ ہے اس لیے میلان جبکہ اس کی تصحیح کب کے لیے کی جائے

۲۳ ۲۴ ۳۲ ۸۶ ہے۔ نیز چونکہ اوسط میلان یکساں طور پر سالانہ ۶۸ ۶۴  
کی شرح سے گھٹتا ہے اس لیے اس میلان میں سے ۰۸ ۶۴ گھٹانا چاہئے

تاکہ ۲ مارچ ۱۹۱۱ء کو ظاہری میلان حاصل ہو جائے چنانچہ یہ میلان  
۲۳ ۲۴ ۳۲ ۸۶ ہے۔ (دیکھو بحری جنتری صفحہ ۲۱۷)۔

مثال ۳۔ سال کے آغاز پر اوسط اعتدالی نقطہ ۷ ہے۔ بتاؤ کہ  
۷ کے لحاظ سے طریق شمس پر ظاہری اعتدالی نقطہ کا محل ۷ کس طرح محسوب

کیا جاسکتا ہے۔

۲۲ مقدار رک ہے جو دفعہ ۵۹ مساواتوں (۲) کی رو سے  
(۲۵ ف + ۲ گ + ۲ جم گ) کے مساوی ہے۔ مثلاً بتاریخ ۲۵ دسمبر ۱۹۱۰ء  
(نیم شب) ف = ۲۶۲۴۴، لوک گ = ۱۵۲۰۱۸ اور

گ = ۳۳۸ = ۴۴ (بحری جنتری صفحہ ۲۵۱) اس لیے ک = ۲۴۴۲۔  
مثال ۴۔ ثابت کرو کہ دُب اصغر (صہ) کے صعود مستقیم میں  
سالانہ استقبال - ۶۶۳۰ ہے، یہ دیا گیا ہے کہ عہ = ۱۶ ۱۲ ۵۶ ۱۲ اور صہ =  
۱۲ ۸۲ (۱۹۰۰)۔

مثال ۵۔ اس امر کی تشریح کرو کہ ایک سماوی گولے کی مدد سے  
کس طرح یہ معلوم کیا جاسکتا ہے کہ تاروں کے جو مجموعے ۲۰۰۰ سال قبل کیمبرج  
کے عرض بلد میں نظر آتے تھے وہ اب وہاں نظر نہیں آتے۔ نیز یہ بتاؤ کہ آسمان  
کے کس حصہ میں وہ واقع ہیں۔

۶۰۔ ستاروں کی ذاتی حرکتیں۔ ہم دیکھ آئے ہیں کہ کسی

ستارے کے صعود مستقیم اور میل میں تبدیلیوں کی ایک وجہ یہ ہے کہ اُن  
بڑے دائروں میں تبدیلیاں واقع ہوتی ہیں جن کے حوالہ سے ستارہ  
کے یہ محدود لیے جاتے ہیں۔ ان تبدیلیوں کے علاوہ بہت سے ستاروں  
کی صورت میں مقام کی حقیقی تبدیلیاں ہیں جو خود ستاروں کی اصلی حرکتوں  
کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں ان تبدیلیوں کو ہم ذاتی حرکتیں کہیں گے۔  
وہ ستارہ جو شمالی نیم کرہ میں اس قسم کی بڑی سے بڑی معلومہ حرکت رکھتا  
ہے برج کلاب الصمدہ میں مقدار ۶۵ کا ایک چھوٹا  
ہے۔ گروم برج (Groombridge) کے کیٹلاگ میں  
کا عدد ۱۸۳۰ ہے اور اس کے محدود سنہ ۹ کے لیے یہ ہیں

$$\text{عہ} = ۱۱ ۴۴۲ ۴۴، \text{صہ} = ۳۸ ۲۶$$





ماسی رفتار ۵۰ میل فی ثانیہ ہے، اس لیے فضا میں سورج کے لحاظ سے اس کی کل رفتار تقریباً ۱۶۰ میل فی ثانیہ معلوم ہوتی ہے۔

## ۶۱۔ ارضی عرض بلدوں میں تغیرات۔ کوٹنر (Kustner)

نے معلوم کیا کہ وہ محور جس کے گرد زمین گھومتی ہے بلحاظ زمین کے ایک چھوٹی حرکت رکھتا ہے۔ زمین کے محور میں ایسی تبدیلی کا یہ اثر ہوتا ہے کہ ارضی قطبوں کے محل بدل جاتے ہیں اور اس لیے ارضی خط استوا کا محل بدل جاتا ہے۔ اس لیے زمین کی سطح پر کے کسی نقطہ کے عرض بلد میں تبدیلیاں واقع ہوتی ہیں جو اس نقطہ کی واقعی حرکت کی وجہ سے نہیں ہیں بلکہ اس قاعدہ میں تبدیلیوں کی وجہ سے ہیں جس سے عرض بلدنا پے جاتے ہیں۔ اس مضمون کی سب سے پہلی باقاعدہ تحقیق چانڈلر (Chandler) نے ۱۸۹۱ء میں کی، اس سے یہ

بتا یا کہ عرض بلد میں مشاہدہ شدہ تبدیلیاں اس مفروض کے ذریعہ بظاہر سمجھائی جاسکتی ہیں کہ زمین کا قطب تقریباً چودہ ماہ کے وقفہ میں تیس فٹ کے نصف قطر کا ایک دائرہ مرسوم کرتا ہے۔ خود چانڈلر اور دیگر علماء ہیئت کی بعد کی تحقیقاتوں نے یہ ثابت کیا کہ گویہ عام واقعہ صحیح ہے کہ قطب متحرک ہے لیکن اس کی حرکت کی نوعیت اس قدر سادہ نہیں ہے جیسے کہ پہلے فرض کی جا چکی تھی۔ ہم یہاں وہ نقشہ (شکل ۱۱) نقل کرتے ہیں جو پروفیسر البرشت (Albrecht) نے انٹرنیشنل جیوڈٹیک ایسوسی ایشن

(Int. Geodetic Association) کے کام کے مشترک نتیجہ کے طور پر

میں دیا ہے۔ "Astronomische Nachrichten"

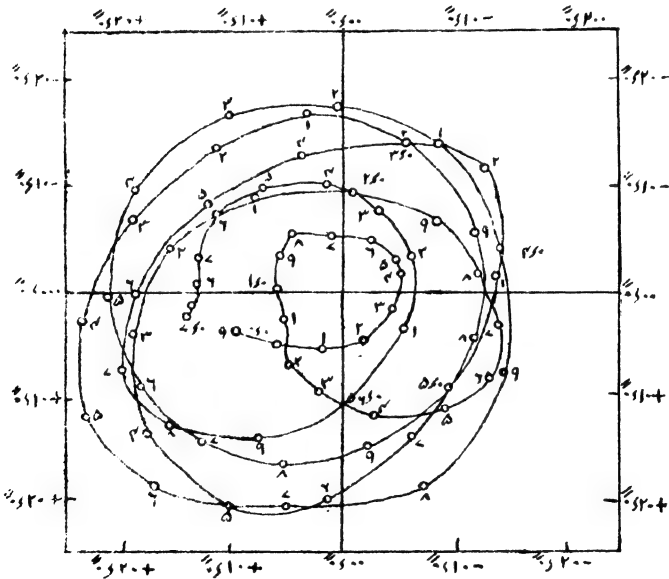
بھی دیا جاسکتا ہے جو سٹرٹنی ڈی ٹاؤنلی (Sidney Townley) نے

(The Publications of the Astronomical Society of

۱۵۲ ویں ہے۔

نقشہ میں شکل کے مرکز پر کا مبداء زمین میں شمالی قطب کا اوسط ہے اور زمین پر نشان کئے ہوئے نقطوں سے متناظر تارینوں پر

قطب کے حقیقی محل معلوم ہوتے ہیں۔ مثلاً مرکز سے جو قریب ترین منحنی ہے اس سے قطب کی حرکت ۱۹۹۹ء سے ۱۹۸۱ء تک معلوم ہوتی ہے اور پھر اس سے آگے کی ترتیم اس کے مختلف بیضوں میں ۱۹۸۱ء تک معلوم کی جا سکتی ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ قطب کے محل ایک مربع کے اندر شامل ہیں جس کا ہر ضلع زمین کے مرکز پر تقریباً ۵۰ کا زاویہ بناتا ہے۔ پس قطب کی حرکتیں ان چھ سالوں میں ایک مربع کے اندر رہتی ہیں جس کے ضلع ۵۰ فٹ سے بڑے نہیں ہیں۔ انفرادی محل بڑی حد تک مشتبہ ہیں۔



شکل (۶۱)

## آٹھویں باب پر مثالیں

(۱۹۸)

مثال ۱۔ یہ تسلیم کر کے کہ استقبال کا مستقل  $۵۰۶۲۲۵۳ + ۵۰۰۰۰۲۲۲۵$  سے ہے جہاں ت سالوں میں  $۵۵۵۵$  سے وقفہ ہے، سالوں کی وہ تعداد معلوم کرو جو  $۷$  کی طریق اشمس کا مکمل دور کرنے سے قبل گزرنی چاہئے۔  
مکمل کرنے سے ۷ سال میں  $۷$  کی حرکت معلوم ہوتی ہے اور اگر لا وہ عدد ہو جس کی تلاش ہے تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$۱۲۹۶۰۰۰ = ۵۰۰۰۱۱۱۲۵ + ۵۰۶۲۲۵۳$$

اس دو درجہ کی دو اصلوں میں سے ایک منفی ہے اور اس لیے ناقابل قبول  
دوسری اصل  $۲۲۲۲۶۸$  ہے یا تقریباً  $۰۰۰۲۲۵$ ۔

\* مثال ۲۔ ثابت کرو کہ کرہ سماوی پر کے وہ نقطے جہاں استقبال اور کبوتر کی وجہ سے صعود مستقیم میں تصحیح کسی دن ہوے دن میں صفر ہے مخروط

$$\text{نت (لا + ما)} + \frac{۱}{۱۵} \text{گ ی (لا جب گ + ما جم گ)} = ۰$$

پرواقع ہوتے ہیں جہاں مبدا سورج کے مرکز پر ہے اور محاور  $۰$ ،  $۹۰$ ،  $۱۸۰$ ،  $۲۷۰$  سے  
علی الترتیب ان نقطوں میں سے گزرتے ہیں جن کے صعود مستقیم اور میل  
( $۰$ ،  $۹۰$ )، ( $۹۰$ ،  $۰$ )، ( $۰$ ،  $۹۰$ )، ( $۹۰$ ،  $۰$ ) میں اور جہاں ف 'گ'، 'گ' زیر بحث دن  
کے لیے غیر تابع یومی اعداد ہیں۔ اگر کبوتر کو ترک کر دیا جائے تو دفعہ  $۵$  کی  
اخذ کرو۔

۳۔ کبوتر کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ ستارہ (ع، قہ) کی  
نک دو متواتر واپسیوں کے درمیان وقفہ کو کبوتری یوم سے بقدر  
دش جب ع سس ضہ کے متجاوز ہوگا جہاں کبوتری یوم وہ وقفہ ہے جو



جہاں ق شمالی قطب ہے اور ب وہ نقطہ ہے جس کے محدودہ = ۹۰° نہ = ہیں۔

وہ نقطہ جہاں سال کے آغاز میں ۲ واقع تھا تاریخ ت کے استواء کے لحاظ سے محدودہ = ۱۵° ف، نہ = گ جم گ رکھتا ہے جہاں ف وقت کے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہے۔ اسی طرح نقطہ ب سال کے آغاز میں تاریخ ت کے استواء کے لحاظ سے محدودہ = ۹۰° + ۱۵° ف، نہ = گ جب گ رکھتا ہے۔ علم ہندسہ سے یہ واضح ہے کہ شیطوں ۲، ب، ق کے گرد گردشیں گ جب گ، گ جم گ اور ۱۵° ف، زیر بحث دو نقطوں کو آغاز سال کے استواء سے تاریخ ت کے استواء تک لچائیں گی۔

مثال ۷۔ ہندسی طور پر ثابت کرو کہ ستاروں کے صعود و مستقیم اور میل پر وقفہ ت میں استقبال اور کبوتر کا اثر اس اثر کے حامل ہے جو کہ سماوی کو (دہ کرہ سماوی جس میں ستارے ہیں لیکن حوالہ کے دائرے نہیں) ایک قطر کے گرد گھمانے سے پیدا ہوتا ہے جو اس نقطہ میں سے گذرتا ہے جس کا طول بلد سفر ہے اور عرض بلد

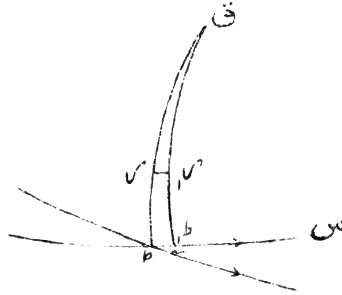
$$\text{مسار} = \frac{\text{ارتفاع} + \text{مف ل}}{\text{مف سہ}}$$

ہے۔ گردش کا زاویہ

$$\left\{ \text{ارتفاع} + \text{مف ل} \right\} + \left\{ \text{مف سہ} \right\}$$

ہے اور اس کی سمت رجعی ہے جہاں ل استقبال کا مستقل ہے اور مف ل، مف سہ علی الترتیب طول بلد میں اور طریق الشمس کے میلان میں کبوتر ہیں۔ طول بلد میں استقبال اور کبوتر کا اثر کہ سماوی کو طریق الشمس کے قطب زاویہ ارتفاع + مف ل = ط ق ط (شکل ۶۲) میں سے گھمانے جا سکتا ہے۔ اسی طرح ق ط پر کا کوئی نقطہ س، ق ط پر کے پرنقش ہوتا ہے۔ اس گردش کی سمت اس لازمی نتیجہ سے متعین

ہوتی ہے کہ وہ ہر نقطہ کے طول بلد کو بڑھانی چاہئے۔



شکل (۶۲)

(۲۰۰) اُس تبدیلی کو پیدا کرنے کے لیے جو کعبہ مف سہ کی وجہ سے سہ میں واقع ہوتی ہے کرّہ سماوی کو ط کے گرد گھمانا چاہئے۔ زاویہ مف سہ میں سے خط استواء کی حرکت اُس زاویہ کو بڑھا دیتی ہے جو طریق الشمس ط میں اور خط استواء کے درمیان ہے لیکن طریق الشمس ثابت رہتا ہے۔ یہ اثر وہی ہوگا گویا سب نقطوں کو ط کے گرد خلاف سمت ساعت گردش مف سہ دی گئی ہے۔ ق ط پرکا ہر نقطہ بائیں جانب حرکت کرے گا اور کوئی خاص نقطہ سہ ایسا ہوگا جو اپنے ابتدائی مقام سہ پر واپس آئے گا۔ پس جہاں تک اس نقطہ کا تعلق ہے یہ دو گردشیں ایک دوسرے کی تغدیل کرتی ہیں۔ اس لیے ط اور ق کے گرد یہ دو گردشیں س کے گرد ایک گردش میں ترکیب پاتی ہیں۔

اگر س کا عرض بلد ط ہو تو ط س = ط اور

س کا = (ات + مف ل) جم ط = مف سہ جب ط سہ  
اس لیے مس ط = (ات + مف ل) مف سہ اور چونکہ ترکیبی گردش  
علی القوائم میں اس لیے حاصل ان کے مربعوں کے مجموعہ کا جذر المربع ہے یعنی

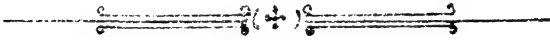
$$\sqrt{(ات + مف ل)^2 + (مف سہ)^2}$$

مثال ۸۔ ثابت کرو کہ کسی دے ہوئے دن میں استقبال اور کبوت کی بعثت ایک ستارہ کے ظاہری مقام کا بڑے سے بڑا ہٹاؤ

$$\sqrt{(اوت + سف ل) + (سف سم)}$$

ہے اور یہ کہ وہ سب ستارے جن میں یہ ہٹاؤ واقع ہوتا ہے ایک بڑے دائرے پر واقع ہونے چاہئیں جس کی مسادات

جم نجم فضہ سف سم + (جم فضہ سم) جب نجم فضہ سم (اوت + سف ل) =۔  
ہے اور بالآخر یہ کہ ہٹا ہوا محل بھی اسی بڑے دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔



# نواں باب

## کوکبی وقت اور اوسط وقت

(۲۰۱)

صفحہ	صفحہ
۳۰۹	۶۲ - کوکبی وقت
۳۱۱	۶۳ - ہیئت کروی کی تصحیح
۳۱۵	۶۴ - طریق الشمس کا میلان
۳۲۰	۶۵ - صعود مستقیم کی تعیین میں جتنی صحت ممکن ہے اس کی تعیین
۳۲۳	۶۶ - کوکبی سال اور شمسی سال
۳۲۶	۶۷ - اوسط حرکت کا ہندسی اصول
۳۳۱	۶۸ - اوسط وقت
۳۳۵	۶۹ - اوسط ظہر پر کوکبی وقت
۳۳۸	۷۰ - کوکبی وقت سے اوسط وقت معلوم کرنا
۳۴۲	۷۱ - ارضی تاریخ خط
	۶۲ - کوکبی وقت -

ہم دیکھ چکے ہیں (مثال صفحہ ۳۰۹) کہ ۲ تقریباً ۲۳۵۰۰ سال میں  
سموات کی ایک مکمل گردش کی تکمیل کرتا ہے اور وہ ایسی سمت میں کہ  
اس وقفہ میں ستارے ۲ کی یہ نسبت ایک مکمل ظاہری گردش کم کر چکے ہیں۔  
زمین کی محوری گردش کے عرصہ کو کوکبی یوم (دفعہ ۳۳) کے ساتھ وہی نسبت ہے



جو ۲۴۵۰۰ سال + ایک دن کو ۰۰۰۲۴۵ سال سے ہے۔ اس طرح زمین کی محوری گردش کی مدت کو کوکبی یوم سے (جو رصد گاہ میں عملاً استعمال ہوتا ہے) تقریباً بقدر ثانیہ کے ایک سو بیس حصہ کے بڑی ہے۔ دفعہ ۵۹ میں یہ بتایا جا چکا ہے کہ ۷ کی حرکت میں بے قاعدگیوں کی وجہ سے کوکبی یوم کے طول میں جو تغیرات ہوتے ہیں وہ اس قدر چھوٹے ہیں کہ انہیں نظر انداز کیا جاسکتا ہے کوکبی گھڑی میں جس سے ہمارا مطلب ایسی گھڑی سے ہے جو کوکبی وقت کو بتلاتی ہے ایک ڈال ہوتا ہے جو ۲۴ مساوی حصوں میں تقسیم ہوتا ہے اور ان حصوں پر صرف سے لیکر ۲۳ تک ہندسے کندہ ہوتے ہیں۔ جب ۷ مُشاہد کے نصف النہار پر ہوتا ہے تو کوکبی گھڑی (اگر اس میں کوئی خطا نہیں ہے) وقت، گ، ب، ث بتلاتی ہے اور اگر گھڑی کی رفتار صحیح ہو تو وہ پھر وقت

گ، ب، ث بتلائے گی جبکہ ۷ نصف النہار پر پھر واپس ہوگا۔

رصد گاہ میں کوکبی وقت کا انتظام رکھنے میں یہ خاص فائدہ ہے کہ ایک ہی ستارہ بعض چھوٹی تقسیمات کے تحت نصف النہار کو ہر دن ایک ہی کوکبی وقت پر عبور کرتا ہے۔ (۲۰۲)

مثال ۱۔ اگر ایک ستارے کی ذاتی حرکت کی سالانہ مقدار قوس کے رخ ثنائے ہوی یعنی اگر ستارہ اپنے محل سے ایک سال کے عرصہ میں کُہ مساوی پر قوس کے رخ ثنائے ہئے تو ثابت کرو کہ اس حرکت کا جہاں تک تعلق ہے اس ستارہ کے دو متواتر مُروروں کے درمیان وقفہ، ایک کوکبی یوم سے

$$180000 \times \text{رخ قطضہ ثنائیوں}$$

سے زیادہ فرق نہیں رکھ سکتا جہاں ضہ ستارہ کا میل ہے۔

مثال ۲۔ اگر اس محل کا فاصلہ ایک ثابت استوائی ستارہ سے

$$پ + ق + ا + جم + ت + ب + جب + ت$$

یا 'ا'، 'م'، 'ب' مستقل ہیں اور ت وقت ہے جو سالوں میں ہے تو ثابت کرو کہ ماس محل کے دو متواتر بالائی مُروروں کے درمیان وقفہ کے

حسب ذیل دو انتہائی حدود ہوں گے

$$۳۶۶۵۲۴ \sqrt{۲۴ + ۲۱} \text{ م} + ۲۴ \text{ گ}$$

$$۳۶۶۵۲۴ \sqrt{۲۴ + ۲۱} \text{ م} - ۲۴ \text{ گ}$$

فرض کرو کہ ۲ کے بالائی مُرور کا ایک وقت ت ہے تو دوسرا بالائی مُرور

تقریباً وقت ت +  $\frac{۱}{۳۶۶۵۲۴}$  پر واقع ہوگا۔ ۲ کا فاصلہ اس کے ابتدائی محل سے تقریباً

$$پ + ق (ت + \frac{۱}{۳۶۶۵۲۴}) + (جم م ت - م) \frac{۱}{۳۶۶۵۲۴} \text{ جب م ت}$$

$$+ ب جب م ت + م ب \frac{۱}{۳۶۶۵۲۴} \text{ جم م ت}$$

$$- (پ + ق ت + (جم م ت + ب جب م ت))$$

کے تبدیل ہو چکا ہوگا۔

اس میں دوری حصہ  $\frac{۱}{۳۶۶۵۲۴}$  (ب جم م ت - (ب م ت)) ہے اور ت

کی کوئی ایسی قیمت نہیں ہے جو اس کو عدد  $\frac{۱}{۳۶۶۵۲۴}$  (۲ + ب) سے بڑا کر سکے۔

## ۶۳۔ ہیئت گھڑی کی تصحیح -

ہیئت گھڑی کی تصحیح معلوم کرنے کا عملی طریقہ اپنی سادہ ترین شکل میں

حسب ذیل ہے -

الفیمس سے ہر دسویں دن کے لیے سیکڑوں بنیادی ستاروں کے ظاہری صعود مستقیم معلوم ہوتے ہیں یہ ستارے سماوات میں اس طرح پھیلے ہوئے ہوتے ہیں کہ ہر جگہ اور ہر ساعت ان میں سے ایک یا زیادہ ستارے



اس لیے گھڑی اس وقفہ میں جس شرح سے وقت ضائع کر رہی ہے

$$۰۰ \frac{۲۴}{۲۵} \times ۲۱۶ = ۲۶۰۰ \text{ ثانیہ فی یوم ہے۔}$$

جب گھڑی کی شرح معلوم ہوتی ہے تو دو ستاروں کے صعود و ستقیم کا فرق ان کے اوقات مرور کے فرق کا مشاہدہ کرنے سے اور پھر اس وقفہ میں گھڑی کی شرح کے لیے جو تصحیح حاصل ہوئی ہے اس کو عاملہ کرنے سے معلوم کیا جاتا ہے۔

اس طرح اگر صرف ایک جرم سماوی کا ہی صعود و ستقیم معلوم ہو تو ہم دوسرے اجرام سماوی کے صعود و ستقیم بعض شرائط کے تحت متعین کر سکتے ہیں۔ اس لیے اب صرف یہ دکھانا ہے کہ ایک واحد بنیادی صعود و ستقیم کس طرح حاصل کیا جاتا ہے اب چونکہ ۲ کا محل سورج کی حرکت سے معلوم ہو جاتا ہے اس لیے یہ ظاہر ہے کہ سورج ہی وہ جسم ہونا چاہئے جس کا مشاہدہ اس مقصد کے لیے کرنا چاہئے۔

اگر طریق الشمس کا میلان سے ہو اور سورج کا صعود و ستقیم عدہ اور میل ضہ ہو جہاں سورج کے مرکز کو طریق الشمس میں فرض کیا گیا ہے تو

جب عدہ = مس ضہ نم سے ..... (۱)

ہم مان لیں گے کہ مس معلوم ہے (دفعہ ۶۴) اور ضہ کا مشاہدہ کیا جا چکا ہے پھر اس مساوات سے عدہ محسوب کیا جاسکتا ہے۔ اگر مرور کا وقت یہ ہو جو مینی گھڑی سے مشاہدہ کیا گیا ہے تو گھڑی کی خطا عدہ - سے معلوم ہو جاتی ہے (۲۰۰)

اس عمل کی تمثیل کے لیے ہم حسب ذیل صورت لے سکتے ہیں:-  
فرض کرو کہ گرنیج کے نصف النہار پر بتاریخ ۲۸ مارچ ۱۹۰۹ء سورج کے مرور کا وقت گھڑی سے ۲۶ ۴۹ ۲۰ ثانیہ معلوم ہوتا ہے اور سورج کے مرکز کا مشاہدہ کردہ میل ۵۱ ۵۱ ۱۳ آیش ہے۔ طریق الشمس کا میلان ۲۳ ۲۰ ۲۶ معلوم ہے اور ہم گھڑی کی تصحیح معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ مرور پر سورج کا صعود و ستقیم ضابطہ (۱) سے معلوم کیا جاتا ہے اور پھر حساب کا محل

حسب ذیل ہے:-

$$\begin{aligned} \text{لی مس } ۵۱^{\circ} ۳' ۸۵۹۹۹۱۳۵۷ \\ \text{لوک م } ۲۷^{\circ} ۲۳' ۶۵۱۰۰۲۳۶۲۷۷ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{لی جب بگ } ۳۶^{\circ} ۲۱' ۹۵۹۸۳۵۹ = \text{ث } ۲۷^{\circ} ۲۳' ۶۵۱۰۰۲۳۶۲۷۷ \\ \text{اس لیے گھڑی کی تصحیح ہے} \\ \text{بگ } ۲۷^{\circ} ۲۳' ۶۵۱۰۰۲۳۶۲۷۷ - (\text{بگ } ۳۶^{\circ} ۲۱' ۹۵۹۸۳۵۹) = \text{ث } ۲۷^{\circ} ۲۳' ۶۵۱۰۰۲۳۶۲۷۷ \end{aligned}$$

گھڑی کے کسی وقت میں یہ تصحیح کرنے سے اور گھڑی کی شرح (جسے مستقل مان لیا گیا ہے) کی رعایت رکھنے سے متناظر اصل کوکبی وقت معلوم ہو جاتا ہے۔

کسی ستارہ کا صعود مستقیم معلوم کرنے کے حسب ذیل طریقہ میں ہم فرض کر لیں گے کہ استقبال اور کبوتر کے اثرات کا لحاظ رکھا جا چکا ہے۔ فرض کرو کہ ایک ستارہ کا نامعلوم صعود مستقیم عہ ہے اور کسی دن کسی مقام پر تہ کوکبی وقت کا وہ وقفہ ہے جو سورج کے مُرور کے بعد سے ستارہ کے مُرور تک گزرتا ہے۔ اس لیے سورج کا صعود مستقیم عہ - تہ ہے اگر اس کا میل ضم ہو اور طریق الشمس کا میلان سے ہو تو

جب (عہ - تہ) = مس ضم مم سے ..... (۲)  
اثنائے سال میں کسی دوسرے موقع پر فرض کرو کہ سورج کا میل ضم ہے اور اس کا مُرور ستارہ کے مُرور سے وقت تہ قبل واقع ہوا ہے تو

جب (عہ - تہ) = مس ضم مم سے ..... (۳)  
ان کو تفریق کرنے سے اور پھر جمع کرنے سے ہم یہ آسانی اخذ کرتے ہیں

۱ + تہ = ۱/۲ مم (تہ - تہ) جب (ضم - ضم) مم (ضم + ضم) ..... (۴)

۱ - تہ اور ضم کا اور وقت کے وقفوں تہ اور تہ کا مشاہدہ کرنے سے

عہ معلوم کرنے کے ذرائع حاصل ہوتے ہیں اگرچہ سہ کی قیمت پہلے سے نا معلوم ہو۔

(۲۰۵) مثال ۱۔ اگر ہنستی گھڑی کی تصحیح گھڑی کے وقت تب پر ع ہو اور اگر گھڑی فی دن رٹانے تیز ہو تو ثابت کرو کہ اصلی وقت حاصل کرنے کے لیے گھڑی کے کسی وقت تب میں جو تصحیح عائد کرنی ہوگی وہ ع۔ (ت۔ تب) ۲۴/۲ ہے جہاں ت اور تب گھنٹوں میں بیان کئے گئے ہیں۔

مثال ۲۔ اوسط وقت کی ایک گھڑی کے رفاص کے وسط میں ایک چھوٹا سا شیلف (Shelf) لگا یا گیا ہے جس پر چند چھوٹی مساوی کمیتیں ہیں جن میں سے ہر ایک ٹھیک اس قدر وزنی ہے کہ ان کی تعداد میں ایک کے اضافہ سے گھڑی کی شرح میں ایک ثانیہ یومیہ کا اضافہ ہوتا ہے۔ یہ انتظام کیا گیا ہے کہ ان کمیتوں کی کوئی چھوٹی تعداد شیلف پر رکھی جاسکتی ہے یا شیلف سے جدا کی جاسکتی ہے جبکہ گھڑی چل رہی ہو اور اس سے گھڑی کی حرکت میں خلل واقع نہیں ہوتا۔

اگر کل بوقت ظہر گھڑی کی تصحیح ع تھی اور آج بوقت ظہر ع ہے تو ثابت کرو کہ کمیتوں کی وہ تعداد جو شیلف پر رکھنی ہوگی تاکہ کل بوقت ظہر گھڑی ٹھیک وقت بتلائے ع۔ ع۔ ہے۔

مثال ۳۔ بتایہ ۲۵۔ مارچ ۱۹۵۵ء سورج نصف النہار کو جب (عہ) (Orionis) سے ۵ ۳۴ ۳۷ قبل عبور کرتا ہے اور بتایہ ۲۶۔ ستمبر سورج

نصف النہار کو جب (عہ) کے ۵ ۳۴ ۳۷ بعد عبور کرتا ہے۔ ان تاریخوں میں سورج کے میل علی الترتیب + ۳۴ ۳۷ ۲۶ اور + ۳۴ ۳۷ ۲۶ ہیں۔ ثابت کرو کہ جب (عہ) کا صعود مستقیم تقریباً ۵ ۳۴ ۳۷ ہے۔

۶۴۔ طریق الشمس کا میلان۔ طریق الشمس کا میلان

(دیکھو صفحہ ۲۸۸) تقریباً انقلاب کے وقت سورج کے میل کی پیمائش سے معلوم کیا جاتا ہے۔ اگر یہ پیمائش انقلاب کے وقت محل میں آسکے تو میلان اس پیمائش کردہ میل کے مساوی ہوگا۔ لیکن عین انقلاب کے وقت سورج کے میل کا مشاہدہ کرنا بالعموم عملاً آسان نہیں ہے۔ اس لیے غور طلب سوال یہ ہے کہ یہ میلان کس طرح حاصل کیا جاتا ہے جبکہ سورج کے میل کا مشاہدہ انقلاب کے قریب زمانہ میں کیا جائے اور صعود و مستقیم معلوم ہو۔  
دفعہ سابق کی بموجب

مس سہ = مس ضہ قم عہ ..... (۱)  
پہلی نظر میں یہ دکھائی دیگا کہ سہ کی تعیین کے لیے جبکہ ضہ اور عہ دے گئے ہوں اس سے زیادہ سادہ ضابطہ ہو نہیں سکتا۔ لیکن ہم بتائیں گے کہ اعمال حساب کے لیے اس سے زیادہ عملاً مفید ضابطہ حاصل کیا جاسکتا ہے اگرچہ اس کی شکل زیادہ پیچیدہ ہے اور گو وہ صرف ایک تقریری ضابطہ ہے اور مستدرجہ بالا ضابطہ (۱) بالکل ٹھیک ہے۔

انقلاب گرما کے لیے ضابطہ (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس (سہ - ضہ)} = \frac{\text{مس ضہ (۱ - جب عہ)}}{\text{جب عہ + مس ضہ}}$$

= جب ضہ جم ضہ (۱ - جب عہ) کیونکہ جب عہ تقریباً ایک ہے

$$\text{اس لیے سہ - ضہ = جب ۲ ضہ جب ۲ (۵۴ - ۱/۴ عہ) قم ۱ ..... (۲)}$$

(۲۰۶) یہ وہ خاص ضابطہ ہے جو اس عمل حساب میں استعمال ہونا چاہئے کیونکہ ضابطہ (۲) میں ہم سہ کو محسوب نہیں کر رہے ہیں بلکہ سہ - ضہ کو اور چونکہ سہ نہ کے مساوی ہے اس لیے صرف چھوٹی مقدار سہ - ضہ تاہے۔ اس کی تشریح ایک خاص صورت کے لیے

بارخ ۲۲ جون ۱۹۰۹ء سورج کا ظاہری میل بمقام گرینویچ بوقت

ظاہری ظہر ۲۳ ۳۲۷ ہے۔ اس کا مستقیم ۶ ۲۹۱ ۳۳۵ (۹۰ ۲۸ ۳۵ ۹۵ ۴۰) ہے۔  
اب ہم سہ۔ ضہ کو ضابطہ (۲) سے محسوب کرتے ہیں اور لوکارتموں میں  
اعشاریہ کے صرف تین مقامات استعمال کرتے ہیں۔

$$\text{لی جب } ۲ \text{ ضہ} = ۹۵۸۶۳ =$$

$$\text{لی جب } ۲۵ - \frac{۱}{۴} \text{ (عہ)} = ۷۵۷۷۴ = (۷۰)$$

$$۷۵۷۷۴ = (۷۰)$$

$$\text{لوک } ۲ \text{ قم} = ۵۵۳۱۳ =$$

$$\text{لوک (سہ۔ ضہ)} = ۵۳۲۵ = \text{سہ۔ ضہ} + ۲۵۱ =$$

$$\text{سہ} = ۶۵۴۷۳ =$$

لوکارتموں میں تین سے زیادہ ہندسوں کے استعمال میں کوئی فائدہ  
نہیں ہے کیونکہ بقیہ ہندسوں کو ترک کرنے سے سہ میں ۱۰ کا فرق  
کسی حال نہیں ہو سکتا۔ یہ بھی واضح ہے کہ ضہ کو صرف قریب ترین منٹ  
تک لینا کافی ہے جبکہ لوک جب ۲ ضہ کو لکھا جا رہا ہو۔  
اگر ہم سہ کو ضابطہ (۱) میں تین ہندسی لوکارتم استعمال کر کے معلوم  
کرنے کی کوشش کرتے تو حاصل ہوتا

$$\text{لی مس ضہ} = ۹۵۶۳۷ =$$

$$\text{لی جب عہ} = ۵۰۰۰ =$$

$$\text{لی مس سہ} = ۹۵۶۳۷ =$$

جس سے یہ ظاہر ہے کہ سہ ۲۳ ۲۸ ۳۸ اور ۲۳ ۲۷ ۴۰ کے درمیان  
کوئی زاویہ ہو سکتا ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ ضابطہ (۲) سے سہ کی  
قیمت ۹۵۷۷۴ تک صحیح ملتی ہے اور برخلاف اس کے ضابطہ (۱) سے سہ  
کی جو قیمت حاصل ہوتی ہے وہ تقریباً ۳۴ تک غلط ہو سکتی ہے حالانکہ  
ہر صورت میں لوکارتموں میں اعشاریہ کے مقامات کی ایک ہی تعداد



استعمال کی گئی ہے۔ چند مزید آزمائشوں سے یہ معلوم ہوگا کہ تین ہندسی لوکارتموں کو تقریبی ضابطہ (۲) میں استعمال کرنے سے فی الواقع ایک زیادہ صحیح نتیجہ حاصل ہوتا ہے بہ نسبت اس کے کہ ٹھیک ضابطہ (۱) میں ۴، ۵، ۶ یا ۷ ہندسی لوکارتم بھی استعمال کئے جائیں اور یہ بات صحیح ہے باوجود اس کے کہ ضابطہ (۲) ضابطہ (۱) سے ماخوذ ہے۔

بلاشبہ ضابطہ (۱) سے صحیح نتیجہ حاصل ہوگا اگر لوکارتموں میں اعشاریہ کے مقامات کی کافی تعداد استعمال کی جائے۔ مثلاً ۷ ہندسے استعمال کرتے

$$\text{لوک مس ضہ} = ۹۶۳۷۲۸۹۵$$

$$\text{لوک جب عہ} = ۹۶۹۹۹۸۷۸$$

$$\text{لوک مس سہ} = ۹۶۳۷۳۰۱۷$$

اور اس سے صحیح نتیجہ سہ = ۹۶۳۷۳۰۱۷ حاصل ہوتا ہے۔ لیکن یہ بغیر بینی ادراج کے حاصل نہیں ہو سکتا اگرچہ ہم بیگے (Begay) کی جدو لیں استعمال کریں جن میں مثلثی تفاضلوں کے لوکارتم قوس کے ہر ثانیہ کے لیے درج ہیں۔

(۲۰۷)

نہ صرف طریق الشمس کے میلان کی تعیین کے سلسلہ میں بلکہ دیگر ہیئت مسئلوں میں بھی جن میں ایک نامعلوم مقدار کی تلاش کی جاتی ہے اور جن میں عمل حساب کے لیے سب سے زیادہ موزوں ضابطہ کا انتخاب کرنا ہوتا ہے نکتہ مشرق الصدر نہایت اہم ہے۔

بالعموم ہمیں ایسا ضابطہ منتخب کرنا چاہئے جس سے ضابطہ (۲) کی طرح ایک ایسا جملہ ملے جو نامعلوم مقدار کی ٹھیک قیمت کو تعبیر نہ کرے۔ اہم مقدار اور ایک معلومہ تقریبی قیمت کے درمیان فرق کو ظاہر کرے۔ ایسا ضابطہ مل جائے تو عمل حساب میں تکلیف دہ

سے بالعموم نجات مل سکتی ہے اور لوکارتموں میں اعشاریہ مقامات کی تعداد کافی ہوتی ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ انقلاب سرما کے قریب زمانہ میں طریقی الشمس کا میلان سے ضابطہ  $\text{سہ} = \text{ضہ} + \text{قم}$  جب  $۲$  ضہ جب  $(۲۵^\circ + \frac{1}{4} \text{عہ})$  سے حاصل ہوتا ہے جہاں سورج کا صعود مستقیم  $\text{عہ}$  ہے اور جنوبی میل ضہ۔ نیز اس ضابطہ کو یہ ثابت کرنے میں استعمال کرو کہ جس وقت ضہ  $= ۲۳^\circ ۲۶' ۵۸''$  ج اور  $\text{عہ} = ۱۷^\circ ۵۷' ۴۸''$  (۲۲ دسمبر ۱۹۰۷ء) تو طریقی الشمس کا میلان  $۲۳^\circ ۲۷' ۵۹''$  ہے۔

مثال ۲۔ حسب ذیل مشاہدہ اور مفروضات سے ثابت کرو کہ تباریخ یکم جنوری ۱۸۹۳ء طریقی الشمس کا میلان  $۲۳^\circ ۲۷' ۵۹''$  تھا۔ مشاہدہ :-

۵ (سورج) کا ظاہری میل تباریخ ۱۹ جون ۱۸۹۳ء بوقت ظاہری ظہر  $۲۳^\circ ۲۶' ۵۹''$  ش  
بحری جیٹری مافوڈ :- ۵ کا ظاہری صعود مستقیم تباریخ ۱۹ جون ۱۸۹۳ء بوقت ظاہری ظہر  $۵^\circ ۵۲' ۵۲''$  ش

۵ کا ظاہری عرض بلد تباریخ ۱۹ جون  $۴۵^\circ ۱۷'$  ش  
میلان میں کبوتباریخ ۱۹ جون  $۳^\circ ۷' ۵۲'' +$   
میلان میں قرنی تبدیلی سالانہ  $- ۶'' ۴۷'$

سیاروی اختلال (perturbations) کی باعث زمین تھوڑی حد تک کبھی تو طریقی الشمس کی ایک جانب اور کبھی دوسری جانب ڈگمگاتی ہے، اس لیے سورج کا مرکز ظاہر ایک چھوٹا عرض بلد پہ رکھتا ہے جو اگرچہ بالعموم نظر انداز کیا جاتا ہے لیکن اس سوال میں محسوب کیا گیا ہے۔ سہ کی قیمت تباریخ ۱۹ جون یہ آسانی حاصل ہوتی ہے

سہ  $= \text{ضہ} - \text{بہ جب سہ قم ضہ} + \text{بہ جب ۲ ضہ جب } (۲۵^\circ - \frac{1}{4} \text{عہ}) \text{ قم } ۱$

اس میں دی ہوئی قیمتیں درج کرنے سے

سہ =  $۲۶۲۳ + ۴۲۲۹۰ = ۳۵۵۹۵$  اور میلان کی قرنی تبدیلی نصف سال کے لیے -  $۲۴$  ہے اس لیے سہ کی محصلہ بالاقیمت میں نقصانات -  $۲۴$  اور  $۲۴ + ۲۴$  عمل میں لانے سے آغاز سال پر اوسط میلان  $۲۳$   $۲۴$   $۳۶$  حاصل ہوتا ہے اور یہی مطلوب تھا۔

مثال ۳۔ اگر سورج کا مشاہدہ کردہ صعود مستقیم  $۹۰$  ہو اور اسکا میل ضہ ہو تو طریق الشمس کے میلان کی تعیین کے لیے حسب ذیل ضابطہ انقلاب کے قریب مشاہدات سے معلوم کرو :-

$$\text{سہ} - \text{ضہ} = \frac{\text{مس} \frac{1}{2} \text{ع}}{\text{جب} \frac{1}{2} \text{ع}} - \frac{\text{مس} \frac{1}{2} \text{ع}}{\text{جب} \frac{1}{2} \text{ع}} \text{ جب } ۲ \text{ سہ} + \dots$$

جہاں سہ مطلوبہ میلان ہے اور سہ - ضہ کی پیمائش ثانیوں میں ہوئی ہے۔ حسب ذیل سوالات پر جو ضابطہ بالا سے پیدا ہوتے ہیں احتیاط کے ساتھ غور کرو :-

- (۱) ع کی تعیین کے لیے اس محل کا محل معلوم ہونا ضروری ہے۔
- (۲) سورج کے چھوٹے عرض بلد کی وجہ سے ضہ میں تصحیح کرنی ہوگی۔
- (۳) مطلوبہ مقدار سہ یا میں جانب آتی ہے۔ [Coll. Exam]

۶۵۔ صعود مستقیم کی تعیین میں جتنی صحت ملے گی اسکی تخمینہ

اُس مبادی کی تعیین میں جس سے صعود مستقیم ناپے جاتے ہیں جس حد تک صحت حاصل ہو سکتی ہے اُس کا امتحان کرنا مفید ہے۔

اول فرض کرو کہ میل کی مشاہدہ کردہ قیمتوں سے سورج کا صعود مستقیم نے میں طریق الشمس کے میلان کی قیمت میں مف سہ کی خطا ات جب ع = مس ضہ مم سہ کو تفرق کرنے اور ضہ کو مستقل

ج م ع م ف ع = م س ض ق م س م ف س  
 یا م ف ع = ۲ م س ع ق م س م ف س  
 اس میں سے کی تقریبی قیمت ۲۷۲۳ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے  
 م ف ع = ۲۷۷۲ م س ع م ف س  
 پس اس سے ظاہر ہے کہ جہاں تک ممکن ہو اعتدال کے قریب  
 مشاہدات لینے چاہئیں۔ م ف س کی قیمت دی ہوئی ہو تو ع کے ساتھ  
 م ف ع بھی بڑھتا ہے۔  
 اب چونکہ ہم چاہتے ہیں کہ م ف س ع پر کم سے کم ممکن اثر دے  
 اس لیے ع اتنا چھوٹا ہونا چاہئے جتنا ممکن ہو۔  
 فرض کرو کہ میلان کی افتیاء کردہ قیمت میں قوس کے ایک ثانیہ کی  
 حد تک غلطی ہے تو م ف س = ۱ اور اگر اس خطا سے ع میں وقت کے  
 لاثانیوں کی خطا پیدا ہو تو م ف ع = ۱۵۱۱ اس لیے  
 لا = ۱۸۳۱ م س ع  
 پس اگر صعود مستقیم کو ۱۸۳۱ کے اندر تک صحیح حاصل کرنا ہے تو  
 م س ع کے ۵۴۸۰ یا ع کے ۵۴۸۰ سورج کا یہ صعود مستقیم بتایا ۲۰ اپریل  
 واقع ہوتا ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ اعتدال سے تقریباً ایک ماہ پیشتر یا ایک  
 ماہ بعد تک اس طریقہ پر بھروسہ کیا جاسکتا ہے تاکہ ۲ کا محل ثانیہ کے  
 دسویں حصہ تک صحیح حاصل ہو بشرطیکہ طریق الشمس کے میلان کی مفروضہ  
 قیمت قوس کے ایک ثانیہ کے اندر تک صحیح معلوم ہو۔ بلاشبہ یہاں یہ  
 تسلیم کر لیا گیا ہے کہ سیل کی مشاہدہ کردہ قیمت میں کوئی خطا نہیں ہے۔  
 اب ہمیں یہ غور کرنا چاہئے کہ مشاہدہ کردہ سیل میں خطا ہو تو اس خطا  
 کا کیا اثر سورج کے صعود مستقیم کی محسوس قیمت پر پڑے گا۔  
 مساوات جب ع = م س ض م م س کو بلحاظ ع اور ض کے  
 تفرق کرنے اور سہ کو مستقل سمجھنے سے حاصل ہوتا ہے  
 م ف ع = ق ط ع ق ط ض م م س م ف ض

### اس کو شکل

مف عہ ۷۰ قط عہ (۱+ جب ۲۰ سن ۲۰) مم سے مف ضہ  
 میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ ضہ پیمائش سے معلوم کیا جاسکتا ہے  
 اس لیے مشاہدات کی ترتیب میں احتیاط برتنی چاہئے تاکہ کوئی خطا مف ضہ  
 (اور ظاہر ہے کہ ایسی خطائیں ناگزیر ہیں) غیر مناسب طور پر عہ کو متاثر نہ کرے  
 جزو ضروری مم سے مستقل ہے اور چونکہ سورج کا میل ۲۳° سے ہرگز متجاوز  
 نہیں ہوتا اس لیے قط ۲۳° ضہ میں کوئی بڑے تغیرات نہیں ہوں گے۔ لیکن  
 چونکہ قط عہ کی اسے ۹۰ تک کوئی قیمت ہو سکتی ہے اس لیے یہ ظاہر  
 ہے کہ مف عہ کو حتی الامکان چھوٹا رکھنے کے لیے قط عہ کو اس کی کمیل  
 ترین قیمت پر رکھنا چاہئے یعنی ۱۸۰ تقریباً صفر یا ۱۸۰ ہونا چاہئے اور  
 اس لیے سورج ۶ یا ۷۰ کے قریب ہونا چاہئے اور اس لیے مشاہدات  
 اعتدال ربیع یا اعتدال خریف کے قریب کرنے چاہئیں۔

سہ کی عددی قیمت درج کرنے سے ہم آسانی سے معلوم کرتے ہیں کہ  
 مف عہ کی قیمتیں سورج کے مختلف صعود مستقیموں کے جواب میں منسلک ہیں۔

سورج کا صعود مستقیم	مف عہ
۳۰	۲۶ ۳
۲۰	۲۶ ۸
۱۰	۵۶ ۳

اور انقلاب پر مف ضہ کا سر لا متناہی ہوگا۔

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اعتدالین میں سے ایک کے قریب  
 مشاہدات کر کے خطاؤں کو اقل بنا کر کس قدر ضروری ہے۔

عہود مستقیم ثانیہ کے دسویں حصہ کے اندر مطلوب ہو تو  
 ۱۵۰ ۱۵۰ اور اس لیے وقت کے ایک ثانیہ کے  
 فی خطا سورج کے میل کی تعیین میں ۶۲۵ کی خطا سے  
 پیدا ہو سکتی ہے خواہ اعتدال کے قریب ہی مشاہدات کئے گئے ہوں۔

## ۶۶۔ کوکبی سال اور شمسی سال۔

(۲۱۰)

زمین کی گردش کی وجہ سے کسی ارضی مشاہد کو معلوم ہوتا ہے کہ سورج سال میں ایک مرتبہ مساوات کا ایک مکمل دور کرتا ہے۔ لفظ سال کو جو مختلف معنی پہناتے جا سکتے ہیں ان میں امتیاز کرنا ضروری ہے۔

### کوکبی سال وقت کا وہ وقفہ ہے جس میں سورج کا مرکز ستاروں

کے حوالہ سے ایک پوری گردش کی تکمیل کرتا ہے یا یہ کہنا زیادہ صحیح ہو گا کہ کسی ایسے ستارہ کے حوالہ سے جو طریق الشمس میں واقع ہو اور ذاتی حرکت سے محروم ہو۔ کوکبی سال وہ مدت دوران (periodic time) بھی ہے جس میں زمین سورج کے گرد ایک کوکبی گردش کی تکمیل کرتی ہے جبکہ زمین کو نظام شمسی کا ایک سیارہ سمجھا جائے۔ زمانہ ۱۹۰۰ء میں کوکبی سال کی مدت ۳۶۵،۲۵۶،۲۴ اوسط شمسی یوم ہے۔

شمسی (Tropical) سال وہ اوسط وقفہ ہے جو سورج کی راس المحل تک دو متواتر واپسیوں کے درمیان ہوتا ہے۔ یہ نقطہ (راس المحل) طریق الشمس پر استقبال کی وجہ سے حرکت کرتا ہے اور سالانہ ۵۰،۶۲۵،۶۲۴ (نیو کومب) کی شرح (۱۹۰۰ء) سے سورج سے ملنے بڑھتا ہے۔ پس شمسی سال کوکبی سال سے بقدر نسبت

(۳۶۵،۲۵۶،۲۴ - ۳۶۵،۲۵۶،۲۲) کے چھوٹا ہے اور ۳۶۵،۲۵۶،۲۲ اوسط شمسی یوم کے مساوی ہے۔ ہم یہ ذکر کر چکے ہیں (دیکھو نوٹ صفحہ ۲۹۲) کہ ہستی عمل حساب میں شمسی سال کا آغاز اُس آن سے ہوتا ہے جبکہ سورج کا اوسط طول بلد ٹھیک ۲۸۰° ہو، یہ ۱۹۱۰ء میں ۳۵° ۵۰' جنوری کے متناظر تھا۔

کاروباری سال متعین کرنے میں شمسی سال کو بنیاد قرار دیا جاتا ہے نہ کہ کوکبی سال کو۔ جو لین کیا انڈر کی بموجب شمسی سال کو ۳۶۵،۲۵۶،۲۲

فرض کیا گیا تھا اور یہ انتظام تھا کہ ہر چار متصل کاروباری سالوں میں تین سال تو ۳۶۵ دن فی سال کے حساب سے ہوں اور چوتھا سال یعنی وہ جو ۴ سے تقسیم پذیر ہے (Leap year) سال کبیسہ ہو اور اس سال فروری کے مہینہ میں ۲۹ فروری کا اضافہ ہوتا کہ یہ سال ۳۶۶ دن کا ہو جائے۔ اس انتظام سے اوسط کاروباری سال شمسی سال سے تقریباً ۱۱ منٹ بڑھ گیا۔

اوسط کاروباری سال اور شمسی سال میں زیادہ مطابقت پیدا کرنے کے لیے گریگوری کی تصحیح جولین کیلنڈر میں داخل کی گئی۔ اس تصحیح کی بموجب ہر چار صدیوں میں جولین قاعدے سے جتنے سال کبیسہ آتے ہیں ان میں سے تین سال معمولی ۳۶۵ دن کے تصور ہوتے ہیں۔ اگر سال کو تغیر کرنے والا عدد دو صفروں پر ختم ہو تو وہ چونکہ ۴ سے تقسیم پذیر ہوتا ہے اس لیے جولین قاعدے کی بموجب بلاشبہ سال کبیسہ ہوگا۔ لیکن گریگوری کی تصحیح کی بموجب جو کیا لنڈر مرتب ہوا ہوا اس میں ایسا سال سال کبیسہ نہیں ہوگا سوائے اس صورت کے جبکہ سن کو تغیر کرنے والے عدد کے پہلے دو ہندسے ۴ سے تقسیم پذیر ہوں مثلاً ۱۹۰۰، ۲۱۰۰، ۲۲۰۰، ۲۳۰۰ اگرچہ جولین سال کبیسہ ہیں گریگوری کے سال کبیسہ نہیں لیکن ۲۰۰۰ اور ۲۴۰۰ دونوں نظاموں میں سال کبیسہ ہیں۔ ہم وہ جولین کیلنڈر استعمال کرتے ہیں جس میں گریگوری کی تصحیح داخل کی گئی ہے۔

پس موجودہ کیا لنڈر میں ہر چار صدیوں میں ۹۷ سال کبیسہ ہوتے ہیں اور اس لیے چار صدیوں میں دنوں کی تعداد  $4 \times 365 + 97 = 1461$  ہوتی ہے۔ اس لیے کاروباری سال کا اوسط طول ہمارے موجودہ نظام کی بناء پر ۳۶۵.۲۴۲۲ دن ہے۔ یہ شمسی سال سے ۰.۰۰۰۳ دن کے وقت رکھتا ہے۔ یہ تقرب اس قدر صحیح ہے کہ چند ہزار سال تک ابھی پیدا نہیں ہوگی۔

۱۔ ثابت کرو کہ کسی رصد گاہ میں ایک شمسی سال کے دوران میں رائے اصل کے بالائی انکبتوں کی تعداد (یعنی ۲ میں سے سورج کے دو متصل

عبوروں کے درمیان کو کبھی ایام کی تعداد اسی صد سالہ میں اسی سال سورج کے بالائی تکبیدوں کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتی ہے۔  
 سال کے آغاز کے بعد ۷ کے پہلے مژور سے کچھ دیر کے بعد سورج کا تکبید واقع ہونا چاہئے۔ ۷ کے دوسرے تیسرے چوتھے اور آئندہ تکبیدوں پر سورج روز بروز زیادہ بھیجے ہوتا جائے گا تا آنکہ جب سال قریب الختم ہوگا تو وہ تقریباً پورے محیط کے برابر پیچھے رہ جائے گا۔ پس سورج کے ن وین تکبید سے کچھ ہی قبل ۷ (ن + ۱) والے تکبید واقع ہوگا۔ اگر سورج ۷ کو اس کا تکبید واقع ہوئے سے قبل ملائے تو سال مکمل ہوگا لیکن سورج کے تکبیدوں کی تعداد ۷ کے تکبیدوں کی تعداد سے ایک کم ہوگی۔ اگر سورج ۷ کو عین اس وقت ملائے جبکہ ۷ کا تکبید واقع ہو تو سال کے آخری لمحہ میں سورج اور ۷ دونوں کے تکبیدوں کی تعداد میں ایک کا اضافہ ہوگا اور اس طرح پھر بھی سورج کے تکبیدوں کی تعداد ایک کم ہوگی۔

**مثال ۲۔** کسی ملک میں سال کیسے کے لیے ذیل کا قاعدہ مروج ہے :- اگر سال کے عدد کے آخر میں صفر ہوں تو صفروں کے اتنے زوج خارج کر دو جتنے ممکن ہوں۔ تب اگر قیہ عدد ۴ سے تقسیم پذیر ہو تو وہ سال سال کیسے ہوگا۔ دوسرے ملک میں حسب ذیل قاعدہ ہے :- سال کے عدد کو ۳۳ سے تقسیم کرو تب اگر کوئی باقی حاصل ہو اور یہ باقی ۴ سے تقسیم پذیر ہو تو وہ سال کیسے ہوگا۔ ثابت کرو کہ ان دو ملکوں میں گنتی میں ایک دن سے زیادہ کا فرق کبھی نہیں ہوگا۔

۳۳ متصلہ وقفوں میں جن میں سے ہر ایک ۴۰ سال کا ہو ایک اور نصف ایک وقفہ ایسا ہونا چاہئے جس کا آغاز ایسے سال سے ہوگا جس کا عدد ۳۳ سے تقسیم پذیر ہوگا۔ یہ سال سال کیسے نہیں ہوگا اور دوسرے ملک میں ۴۰ سال کے اس وقفہ میں کیسے سالوں کی کل تعداد ۹۶ ہوگی اور اس طرح اس میں ایک دن کم پڑ جائے گا۔ باقی ۳۲ وقفوں میں سے ہر وقفہ میں کیسے سالوں کی تعداد ۹۶ ہوگی۔ اس لیے کل تعداد  $(۳۳ \times ۴۰) = ۱۳۲۰۰$  سال میں  $۹۶ \times ۳۳ = ۳۱۶۸$  ہوگی۔



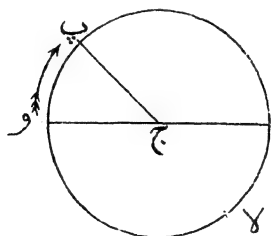
پہلے ملک میں فی ۴۰۰ سال کیسیسہ سال تعداد میں بالعموم ۹۷ ہونگے  
لیکن ۱۳۲۰۰ سال کے وقفہ میں سوال میں دی ہوئی شرط کی بموجب سنتہ  
سال کیسیسہ نہیں ہوگا اور اس طرح یہاں بھی ایک دن کی کمی ہو جائے۔ اس لیے  
ہر ملک میں کیسیسہ سالوں کی کل تعداد ہر ۱۳۲۰۰ سال کے وقفہ میں ۳۳ ۹۷-۱  
= ۳۲۰۰ ہوگی۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ ۱۳۲۰۰ سال کے ہر دور میں ان دو  
ملکوں میں سے ہر ملک میں کیسیسہ سالوں کی تعداد ٹھیک ۳۲۰۰ ہوگی۔

(۲۱۲)

## ۶۷۔ اوسط حرکت کا ہندسی اصول۔

ایک نقطہ پ ایک دائرہ کے محیط پر اس طرح حرکت کر رہا ہے (شکل ۶۳)  
کہ وقت ت پر زاویہ وج پ (= ط) جس کی پیمائش ایک ثابت نصف قطر  
ج و سے ہوئی ہے مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے :-

$$\left. \begin{aligned} & ط = ۱ + \frac{ت}{ت} + \frac{ت}{ت} + \frac{ت}{ت} + \dots \\ & \frac{ت}{ت} + \frac{ت}{ت} + \frac{ت}{ت} + \dots \\ & \frac{ت}{ت} + \frac{ت}{ت} + \frac{ت}{ت} + \dots \end{aligned} \right\} (۱) \dots$$



شکل (۶۳)



اور اصلی محل پ کے حسب ذیل خواص حاصل ہوتے ہیں :-

- (۱) پ اور پ کی دوری مدتیں مماثل ہوتی ہیں۔ معین سے
- (۲) پ اور پ کے درمیان فاصلہ کبھی ایک خاص معین حد
- بڑھ نہیں سکتا۔

- (۳) پ اور پ کے درمیان اوسط فرق ایک پورے دور کے
- اشنا میں صفر ہوتا ہے۔

- (۱) ظاہر ہے کیونکہ دوری مدتوں میں سے ہر ایک متساوی ہے۔
- (۲) حاصل ہوتا ہے کیونکہ پ اور پ کے درمیان فرق کبھی مجموعہ

- (۳) بھی صحیح ہے کیونکہ جب کبھی ن ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے تو
- ..... سے متجاوز
- نہیں ہو سکتا جہاں ہر علامت اس طور پر لیجاتی ہے کہ متناظر رقم مثبت ہو۔
- (۳) بھی صحیح ہے کیونکہ جب کبھی ن ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے تو

$$\text{جب } \frac{2\pi}{\text{ت}} \text{ فرت} = 0 \text{ اور } \frac{2\pi}{\text{ت}} \text{ فرت} = 0$$

اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ہم پ کے محل کو تعبیر کرنے والے زاویہ کو متناظر زاویہ ط میں سے تفریق کریں تو اس فرق کی اوسط قیمت صفر ہے کیونکہ اس فرق میں صرف دوری رقیں شامل ہوتی ہیں اور ان میں سے ہر ایک کی اوسط قیمت صفر ہے۔

پس یہ نتیجہ نکلا کہ پ، دائرہ کے گرد یکساں طور پر حرکت کرنے میں بعض اوقات پ سے آگے ہوتا ہے اور بعض اوقات اس کے پیچھے اور اوسطاً پ، پ سے عین اتنا ہی آگے ہوگا جتنا پیچھے، اس لیے کہ کو بجا طور پر پ کی اوسط حرکت کہا جاسکتا ہے۔ ہم پ کی اوسط مقام پ کے گرد ایک اہمتر ازلی حرکت سمجھ سکتے ہیں۔

۱۔ اگر اوقات ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳۸، ۵۳۹، ۵۴۰، ۵۴۱، ۵۴۲، ۵۴۳، ۵۴۴، ۵۴۵، ۵۴۶، ۵۴۷، ۵۴۸، ۵۴۹، ۵۵۰، ۵۵۱، ۵۵۲، ۵۵۳، ۵۵۴، ۵۵۵، ۵۵۶، ۵۵۷، ۵۵۸، ۵۵۹، ۵۶۰، ۵۶۱، ۵۶۲، ۵۶۳، ۵۶۴، ۵۶۵، ۵۶۶، ۵۶۷، ۵۶۸، ۵۶۹، ۵۷۰، ۵۷۱، ۵۷۲، ۵۷۳، ۵۷۴، ۵۷۵، ۵۷۶، ۵۷۷، ۵۷۸، ۵۷۹، ۵۸۰، ۵۸۱، ۵۸۲، ۵۸۳، ۵۸۴، ۵۸۵، ۵۸۶، ۵۸۷، ۵۸۸، ۵۸۹، ۵۹۰، ۵۹۱، ۵۹۲، ۵۹۳، ۵۹۴، ۵۹۵، ۵۹۶، ۵۹۷، ۵۹۸، ۵۹۹، ۶۰۰، ۶۰۱، ۶۰۲، ۶۰۳، ۶۰۴، ۶۰۵، ۶۰۶، ۶۰۷، ۶۰۸، ۶۰۹، ۶۱۰، ۶۱۱، ۶۱۲، ۶۱۳، ۶۱۴، ۶۱۵، ۶۱۶، ۶۱۷، ۶۱۸، ۶۱۹، ۶۲۰، ۶۲۱، ۶۲۲، ۶۲۳، ۶۲۴، ۶۲۵، ۶۲۶، ۶۲۷، ۶۲۸، ۶۲۹، ۶۳۰، ۶۳۱، ۶۳۲، ۶۳۳، ۶۳۴، ۶۳۵، ۶۳۶، ۶۳۷، ۶۳۸، ۶۳۹، ۶۴۰، ۶۴۱، ۶۴۲، ۶۴۳، ۶۴۴، ۶۴۵، ۶۴۶، ۶۴۷، ۶۴۸، ۶۴۹، ۶۵۰، ۶۵۱، ۶۵۲، ۶۵۳، ۶۵۴، ۶۵۵، ۶۵۶، ۶۵۷، ۶۵۸، ۶۵۹، ۶۶۰، ۶۶۱، ۶۶۲، ۶۶۳، ۶۶۴، ۶۶۵، ۶۶۶، ۶۶۷، ۶۶۸، ۶۶۹، ۶۷۰، ۶۷۱، ۶۷۲، ۶۷۳، ۶۷۴، ۶۷۵، ۶۷۶، ۶۷۷، ۶۷۸، ۶۷۹، ۶۸۰، ۶۸۱، ۶۸۲، ۶۸۳، ۶۸۴، ۶۸۵، ۶۸۶، ۶۸۷، ۶۸۸، ۶۸۹، ۶۹۰، ۶۹۱، ۶۹۲، ۶۹۳، ۶۹۴، ۶۹۵، ۶۹۶، ۶۹۷، ۶۹۸، ۶۹۹، ۷۰۰، ۷۰۱، ۷۰۲، ۷۰۳، ۷۰۴، ۷۰۵، ۷۰۶، ۷۰۷، ۷۰۸، ۷۰۹، ۷۱۰، ۷۱۱، ۷۱۲، ۷۱۳، ۷۱۴، ۷۱۵، ۷۱۶، ۷۱۷، ۷۱۸، ۷۱۹، ۷۲۰، ۷۲۱، ۷۲۲، ۷۲۳، ۷۲۴، ۷۲۵، ۷۲۶، ۷۲۷، ۷۲۸، ۷۲۹، ۷۳۰، ۷۳۱، ۷۳۲، ۷۳۳، ۷۳۴، ۷۳۵، ۷۳۶، ۷۳۷، ۷۳۸، ۷۳۹، ۷۴۰، ۷۴۱، ۷۴۲، ۷۴۳، ۷۴۴، ۷۴۵، ۷۴۶، ۷۴۷، ۷۴۸، ۷۴۹، ۷۵۰، ۷۵۱، ۷۵۲، ۷۵۳، ۷۵۴، ۷۵۵، ۷۵۶، ۷۵۷، ۷۵۸، ۷۵۹، ۷۶۰، ۷۶۱، ۷۶۲، ۷۶۳، ۷۶۴، ۷۶۵، ۷۶۶، ۷۶۷، ۷۶۸، ۷۶۹، ۷۷۰، ۷۷۱، ۷۷۲، ۷۷۳، ۷۷۴، ۷۷۵، ۷۷۶، ۷۷۷، ۷۷۸، ۷۷۹، ۷۸۰، ۷۸۱، ۷۸۲، ۷۸۳، ۷۸۴، ۷۸۵، ۷۸۶، ۷۸۷، ۷۸۸، ۷۸۹، ۷۹۰، ۷۹۱، ۷۹۲، ۷۹۳، ۷۹۴، ۷۹۵، ۷۹۶، ۷۹۷، ۷۹۸، ۷۹۹، ۸۰۰، ۸۰۱، ۸۰۲، ۸۰۳، ۸۰۴، ۸۰۵، ۸۰۶، ۸۰۷، ۸۰۸، ۸۰۹، ۸۱۰، ۸۱۱، ۸۱۲، ۸۱۳، ۸۱۴، ۸۱۵، ۸۱۶، ۸۱۷، ۸۱۸، ۸۱۹، ۸۲۰، ۸۲۱، ۸۲۲، ۸۲۳، ۸۲۴، ۸۲۵، ۸۲۶، ۸۲۷، ۸۲۸، ۸۲۹، ۸۳۰، ۸۳۱، ۸۳۲، ۸۳۳، ۸۳۴، ۸۳۵، ۸۳۶، ۸۳۷، ۸۳۸، ۸۳۹، ۸۴۰، ۸۴۱، ۸۴۲، ۸۴۳، ۸۴۴، ۸۴۵، ۸۴۶، ۸۴۷، ۸۴۸، ۸۴۹، ۸۵۰، ۸۵۱، ۸۵۲، ۸۵۳، ۸۵۴، ۸۵۵، ۸۵۶، ۸۵۷، ۸۵۸، ۸۵۹، ۸۶۰، ۸۶۱، ۸۶۲، ۸۶۳، ۸۶۴، ۸۶۵، ۸۶۶، ۸۶۷، ۸۶۸، ۸۶۹، ۸۷۰، ۸۷۱، ۸۷۲، ۸۷۳، ۸۷۴، ۸۷۵، ۸۷۶، ۸۷۷، ۸۷۸، ۸۷۹، ۸۸۰، ۸۸۱، ۸۸۲، ۸۸۳، ۸۸۴، ۸۸۵، ۸۸۶، ۸۸۷، ۸۸۸، ۸۸۹، ۸۹۰، ۸۹۱، ۸۹۲، ۸۹۳، ۸۹۴، ۸۹۵، ۸۹۶، ۸۹۷، ۸۹۸، ۸۹۹، ۹۰۰، ۹۰۱، ۹۰۲، ۹۰۳، ۹۰۴، ۹۰۵، ۹۰۶، ۹۰۷، ۹۰۸، ۹۰۹، ۹۱۰، ۹۱۱، ۹۱۲، ۹۱۳، ۹۱۴، ۹۱۵، ۹۱۶، ۹۱۷، ۹۱۸، ۹۱۹، ۹۲۰، ۹۲۱، ۹۲۲، ۹۲۳، ۹۲۴، ۹۲۵، ۹۲۶، ۹۲۷، ۹۲۸، ۹۲۹، ۹۳۰، ۹۳۱، ۹۳۲، ۹۳۳، ۹۳۴، ۹۳۵، ۹۳۶، ۹۳۷، ۹۳۸، ۹۳۹، ۹۴۰، ۹۴۱، ۹۴۲، ۹۴۳، ۹۴۴، ۹۴۵، ۹۴۶، ۹۴۷، ۹۴۸، ۹۴۹، ۹۵۰، ۹۵۱، ۹۵۲، ۹۵۳، ۹۵۴، ۹۵۵، ۹۵۶، ۹۵۷، ۹۵۸، ۹۵۹، ۹۶۰، ۹۶۱، ۹۶۲، ۹۶۳، ۹۶۴، ۹۶۵، ۹۶۶، ۹۶۷، ۹۶۸، ۹۶۹، ۹۷۰، ۹۷۱، ۹۷۲، ۹۷۳، ۹۷۴، ۹۷۵، ۹۷۶، ۹۷۷، ۹۷۸، ۹۷۹، ۹۸۰، ۹۸۱، ۹۸۲، ۹۸۳، ۹۸۴، ۹۸۵، ۹۸۶، ۹۸۷، ۹۸۸، ۹۸۹، ۹۹۰، ۹۹۱، ۹۹۲، ۹۹۳، ۹۹۴، ۹۹۵، ۹۹۶، ۹۹۷، ۹۹۸، ۹۹۹، ۱۰۰۰، ۱۰۰۱، ۱۰۰۲، ۱۰۰۳، ۱۰۰۴، ۱۰۰۵، ۱۰۰۶، ۱۰۰۷، ۱۰۰۸، ۱۰۰۹، ۱۰۱۰، ۱۰۱۱، ۱۰۱۲، ۱۰۱۳، ۱۰۱۴، ۱۰۱۵، ۱۰۱۶، ۱۰۱۷، ۱۰۱۸، ۱۰۱۹، ۱۰۲۰، ۱۰۲۱، ۱۰۲۲، ۱۰۲۳، ۱۰۲۴، ۱۰۲۵، ۱۰۲۶، ۱۰۲۷، ۱۰۲۸، ۱۰۲۹، ۱۰۳۰، ۱۰۳۱، ۱۰۳۲، ۱۰۳۳، ۱۰۳۴، ۱۰۳۵، ۱۰۳۶، ۱۰۳۷، ۱۰۳۸، ۱۰۳۹، ۱۰۴۰، ۱۰۴۱، ۱۰۴۲، ۱۰۴۳، ۱۰۴۴، ۱۰۴۵، ۱۰۴۶، ۱۰۴۷، ۱۰۴۸، ۱۰۴۹، ۱۰۵۰، ۱۰۵۱، ۱۰۵۲، ۱۰۵۳، ۱۰۵۴، ۱۰۵۵، ۱۰۵۶، ۱۰۵۷، ۱۰۵۸، ۱۰۵۹، ۱۰۶۰، ۱۰۶۱، ۱۰۶۲، ۱۰۶۳، ۱۰۶۴، ۱۰۶۵، ۱۰۶۶، ۱۰۶۷، ۱۰۶۸، ۱۰۶۹، ۱۰۷۰، ۱۰۷۱، ۱۰۷۲، ۱۰۷۳، ۱۰۷۴، ۱۰۷۵، ۱۰۷۶، ۱۰۷۷، ۱۰۷۸، ۱۰۷۹، ۱۰۸۰، ۱۰۸۱، ۱۰۸۲، ۱۰۸۳، ۱۰۸۴، ۱۰۸۵، ۱۰۸۶، ۱۰۸۷، ۱۰۸۸، ۱۰۸۹، ۱۰۹۰، ۱۰۹۱، ۱۰۹۲، ۱۰۹۳، ۱۰۹۴، ۱۰۹۵، ۱۰۹۶، ۱۰۹۷، ۱۰۹۸، ۱۰۹۹، ۱۱۰۰، ۱۱۰۱، ۱۱۰۲، ۱۱۰۳، ۱۱۰۴، ۱۱۰۵، ۱۱۰۶، ۱۱۰۷، ۱۱۰۸، ۱۱۰۹، ۱۱۱۰، ۱۱۱۱، ۱۱۱۲، ۱۱۱۳، ۱۱۱۴، ۱۱۱۵، ۱۱۱۶، ۱۱۱۷، ۱۱۱۸، ۱۱۱۹، ۱۱۲۰، ۱۱۲۱، ۱۱۲۲، ۱۱۲۳، ۱۱۲۴، ۱۱۲۵، ۱۱۲۶، ۱۱۲۷، ۱۱۲۸، ۱۱۲۹، ۱۱۳۰، ۱۱۳۱، ۱۱۳۲، ۱۱۳۳، ۱۱۳۴، ۱۱۳۵، ۱۱۳۶، ۱۱۳۷، ۱۱۳۸، ۱۱۳۹، ۱۱۴۰، ۱۱۴۱، ۱۱۴۲، ۱۱۴۳، ۱۱۴۴، ۱۱۴۵، ۱۱۴۶، ۱۱۴۷، ۱۱۴۸، ۱۱۴۹، ۱۱۵۰، ۱۱۵۱، ۱۱۵۲، ۱۱۵۳، ۱۱۵۴، ۱۱۵۵، ۱۱۵۶، ۱۱۵۷، ۱۱۵۸، ۱۱۵۹، ۱۱۶۰، ۱۱۶۱، ۱۱۶۲، ۱۱۶۳، ۱۱۶۴، ۱۱۶۵، ۱۱۶۶، ۱۱۶۷، ۱۱۶۸، ۱۱۶۹، ۱۱۷۰، ۱۱۷۱، ۱۱۷۲، ۱۱۷۳، ۱۱۷۴، ۱۱۷۵، ۱۱۷۶، ۱۱۷۷، ۱۱۷۸، ۱۱۷۹، ۱۱۸۰، ۱۱۸۱، ۱۱۸۲، ۱۱۸۳، ۱۱۸۴، ۱۱۸۵، ۱۱۸۶، ۱۱۸۷، ۱۱۸۸، ۱۱۸۹، ۱۱۹۰، ۱۱۹۱، ۱۱۹۲، ۱۱۹۳، ۱۱۹۴، ۱۱۹۵، ۱۱۹۶، ۱۱۹۷، ۱۱۹۸، ۱۱۹۹، ۱۲۰۰، ۱۲۰۱، ۱۲۰۲، ۱۲۰۳، ۱۲۰۴، ۱۲۰۵، ۱۲۰۶، ۱۲۰۷، ۱۲۰۸، ۱۲۰۹، ۱۲۱۰، ۱۲۱۱، ۱۲۱۲، ۱۲۱۳، ۱۲۱۴، ۱۲۱۵، ۱۲۱۶، ۱۲۱۷، ۱۲۱۸، ۱۲۱۹، ۱۲۲۰، ۱۲۲۱، ۱۲۲۲، ۱۲۲۳، ۱۲۲۴، ۱۲۲۵، ۱۲۲۶، ۱۲۲۷، ۱۲۲۸، ۱۲۲۹، ۱۲۳۰، ۱۲۳۱، ۱۲۳۲، ۱۲۳۳، ۱۲۳۴، ۱۲۳۵، ۱۲۳۶، ۱۲۳۷، ۱۲۳۸، ۱۲۳۹، ۱۲۴۰، ۱۲۴۱، ۱۲۴۲، ۱۲۴۳، ۱۲۴۴، ۱۲۴۵، ۱۲۴۶، ۱۲۴۷، ۱۲۴۸، ۱۲۴۹، ۱۲۵۰، ۱۲۵۱، ۱۲۵۲، ۱۲۵۳، ۱۲۵۴، ۱۲۵۵، ۱۲۵۶، ۱۲۵۷، ۱۲۵۸، ۱۲۵۹، ۱۲۶۰، ۱۲۶۱، ۱۲۶۲، ۱۲۶۳، ۱۲۶۴، ۱۲۶۵، ۱۲۶۶، ۱۲۶۷، ۱۲۶۸، ۱۲۶۹، ۱۲۷۰، ۱۲۷۱، ۱۲۷۲، ۱۲۷۳، ۱۲۷۴، ۱۲۷۵، ۱۲۷۶، ۱۲۷۷، ۱۲۷۸، ۱۲۷۹، ۱۲۸۰، ۱۲۸۱، ۱۲۸۲، ۱۲۸۳، ۱۲۸۴، ۱۲۸۵، ۱۲۸۶، ۱۲۸۷، ۱۲۸۸، ۱۲۸۹، ۱۲۹۰، ۱۲۹۱، ۱۲۹۲، ۱۲۹۳، ۱۲۹۴، ۱۲۹۵، ۱۲۹۶، ۱۲۹۷، ۱۲۹۸، ۱۲۹۹، ۱۳۰۰، ۱۳۰۱، ۱۳۰۲، ۱۳۰۳، ۱۳۰۴، ۱۳۰۵، ۱۳۰۶، ۱۳۰۷، ۱۳۰۸، ۱۳۰۹، ۱۳۱۰، ۱۳۱۱، ۱۳۱۲، ۱۳۱۳، ۱۳۱۴، ۱۳۱۵، ۱۳۱۶، ۱۳۱۷، ۱۳۱۸، ۱۳۱۹، ۱۳۲۰، ۱۳۲۱، ۱۳۲۲، ۱۳۲۳، ۱۳۲۴، ۱۳۲۵، ۱۳۲۶، ۱۳۲۷، ۱۳۲۸، ۱۳۲۹، ۱۳۳۰، ۱۳۳۱، ۱۳۳۲، ۱۳۳۳، ۱۳۳۴، ۱۳۳۵، ۱۳۳۶، ۱۳۳۷، ۱۳۳۸، ۱۳۳۹، ۱۳۴۰، ۱۳۴۱، ۱۳۴۲، ۱۳۴۳، ۱۳۴۴، ۱۳۴۵، ۱۳۴۶، ۱۳۴۷، ۱۳۴۸، ۱۳۴۹، ۱۳۵۰، ۱۳۵۱، ۱۳۵۲، ۱۳۵۳، ۱۳۵۴،





نظر انداز کر دیتے ہیں۔ دوری رقوموں میں ہم کافی صحت کا لحاظ رکھتے ہوئے ت کو  
 متواتر  $\frac{1}{4}$  ت  $\frac{1}{4}$  ت  $\frac{1}{4}$  ت بنا سکے ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ  
 آخری تین تاریخوں میں ظاہری طول بلدوں میں سے ہر ایک کو بقدر ۶۰-۳۰  
 کے بڑھانا چاہئے۔ اس طرح ضابطہ (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$۲۸۰ \quad ۲۸ \quad ۱۱ = ۱$$

$$۳۴۲ \quad ۶ \quad ۳۰۶۹ = ۱ + ۳۶۰ \times ۹۱$$

$$۲۵۹ \quad ۵۵ \quad ۴۰۶۴ = ۱ + ۳۶۰ \times ۱۸۲$$

$$۵۴۷ \quad ۳۹ \quad ۲۰۷۲ = ۱ + ۳۶۰ \times ۲۰۷$$

$$۱۶۶۰ \quad ۹ \quad ۳۹۶۲ = ۱ + ۳۶۰ \times ۵۳۸$$

اور اس لیے  $۲۸۰۶۴۹۹ = ۱$

سورج کے اوسط طول بلد کا روزانہ اضافہ ۵۹۸۵۶۵ ہے اور سال کے

آغاز سے ۸۰۶۲۵۶ دنوں بعد یعنی بتاریخ ۲۲ مارچ اوسط طول بلد صفر ہے۔

اگر وہ متعدد چھوٹی رقیں جو یہاں نظر انداز کی گئی ہیں ملحوظ رکھی جائیں تو

سورج کا اوسط طول بلد حاصل ہوگا

$$۲۸۰۶۴۹۹۲۲ + ۳۶۰ \times ۱۹۰۶ = ۲۸۰۶۴۹۹۲۲$$

مثال ۵۔ پچھلی مثال سے ثابت کرو کہ بتاریخ ۷ نومبر ۱۹۰۶ء سورج کا

اوسط طول بلد ۲۲۶۱۰۵ ہے۔

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ سورج کا اوسط طول بلد بوقت ۲۰۶۹۳

جنوری ۱۹۰۹ء تھا اگر یہ دیا گیا ہو کہ سورج کا اوسط طول بلد بتاریخ

یکم اپریل ۱۹۰۹ء ۲۰۷۶۸ ہے اور اس کا روزانہ اضافہ ۵۹۸۵۶۵ ہے۔

## ۶۸۔ اوسط وقت

اگرچہ رصد گاہ کے خاص کام کے لیے کو کبی وقت کو استعمال کرنا

لازمی ہے تاہم یہ ظاہر ہے کہ ہستی گھڑی کا رو باری زندگی کے معمولی مقام صد کو پورا نہیں کرے گی۔ اس آخری غرض کے لیے ایک ایسا دن چاہئے جس کا طول ستاروں کے ذریعہ نہیں بلکہ سورج کے ذریعہ ناپا گیا ہو۔ اس لیے ہم اپنے معمولی وقت کی بنیائش کے لیے وہ دن استعمال کرتے ہیں جو اوسط شمسی یوم کے نام سے مشہور ہے۔

اب چونکہ سورج کی حرکت صغیر مستقیم میں یکساں نہیں ہے اس لیے نصف النہار پر سورج کی دو متواتر واپسیوں کے درمیان وقفہ مستقل نہیں ہے۔ مثلاً ہم یہاں شمسی یوم کا کو کبھی طول پورے سال ۱۹۰۹ء کے چار مساوی لفصل تاریخوں پر دیتے ہیں۔

سلسلہ ۱۹۰۹ء	کو کبھی
ظاہری ظہر یکم جنوری سے ظاہری ظہر دوسری جنوری تک	۲۴ ۴۹ ۴۴
۲۲ اپریل سے ۳ اپریل تک	۳۸ ۵۵ ۲۴
۳ جولائی سے ۴ جولائی تک	۷ ۵۵ ۲۴
۲ اکتوبر سے ۳ اکتوبر تک	۳ ۴۶ ۲۴

اس جدول کی پہلی سطر سے یہ بیان ہوتا ہے کہ اگر وہ وقت جس پر سورج کا مرکز مشاہد کے نصف النہار کو عبور کرتا ہے یکم جنوری ۱۹۰۹ء کو ہستی گھڑی میں دیکھا جائے اور مشاہدے کو دوسرے دن دہرایا جائے تو یہ ہستی گھڑی (اگر اس کی شرح کے لیے رعایت رکھی جائے) سے یہ معلوم ہو گا کہ کو کبھی وقت کے ۲۴ ۴۹ ۴۴ کا تقہ ان دو مروروں کے درمیان

گزر چکا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ظاہری شمسی یوم جس کا آغاز یکم جنوری کی ظاہری ظہر سے سہی یوم سے ۴، ۱۳ کو کبھی ٹانے زیادہ طویل ہے جس کا آغاز ظہر سے ہوتا ہے۔ پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ ظاہری شمسی یوم کا حل نہیں رہتا اور اس کے تغیرات یقیناً تین چوتھائی منٹ سے

متجاوز کرتے ہیں۔ ان بے قاعدگیوں کی وجہ سے شمسی یوم معمولی وقت کی پیمائش کے لیے موزوں اکائی نہیں ہے۔ ہم ایک اوسط شمسی یوم کو اکائی کے طور پر اختیار کرتے ہیں جس کا طول بہت سے سالوں کے ظاہری شمسی ایام کا اوسط وقفہ ہوتا ہے۔ اور پر کی فہرست باب ۱۹ء میں چار دنوں کا اوسط وقفہ ۲۴ گ ۵۷۶ شہتہ اور یہ اوسط شمسی یوم کی ایک تقریبی قیمت ہے۔

جب متصلہ ظاہری شمسی ایام کی ایک بہت بڑی تعداد کا اوسط لیا جاتا ہے تو یہ معلوم ہوا ہے کہ کوکبی وقت میں ایک شمسی یوم کا معادل ۲۴ گ ۵۷۶ شہتہ ہے۔

پیمائش کیوں سے بچنے کے لیے علماء ہیئت نے اس میں سہولت دیکھی ہے کہ ایک موہوم جسم (یا زیادہ صحیح طور پر ایک نقطہ) کا خیال کیا جائے جو ہر لمحہ خط استواء پر رہے اور اس کا ظاہری صعود مستقیم سورج کے اوسط طول بلد کے مساوی ہو۔ اس موہوم جسم کو اوسط سورج کہتے ہیں۔ دفعہ ۴ء میں یہ ثابت کیا جائے گا کہ سورج کا ظاہری صعود مستقیم سورج کے اوسط طول بلد اور دوری رقوموں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ پس سورج کے ظاہری صعود مستقیم اور اوسط سورج کے ظاہری صعود مستقیم میں صرف دوری رقوموں کا فرق ہوتا ہے۔ اس لیے وقت کے ایک طویل وقفہ میں اصلی سورج اور اوسط سورج کے ظاہری صعود مستقیموں کا اوسط فرق صفر کی طرف مائل ہوگا۔ اگر ہم استقبال اور کوکبی وجہ سے خط استواء کی جو حرکت ہے اسے نظر انداز کر سکیں تو اوسط سورج کے متعلق یہ کہا جاسکتا ہے کہ وہ خط استواء میں اس طور پر یکساں حرکت کرتا ہے کہ ہر لمحہ اس کا صعود مستقیم سورج کے اوسط طول بلد کے مساوی ہوتا ہے۔

جب اوسط سورج نصف النہار پر ہو تو وہ گھڑی جو مقامی اوسط وقت کو تعبیر کرتی ہے وقت تک بڑھتا ہے گی۔ پس اوسط وقت کی گھڑی سے جو وقت معلوم ہوگا وہ نصف النہار سے اوسط سورج کے سامنے زادے کو



کسی آن پر ظاہر کرے گا۔ کاروباری مقاصد کے لیے دن کا آغاز نیم شب سے ہوتا ہے اور گھنٹے ۱۲ سے ۱۲ (ظہر) تک اور پھر آگ سے ۱۲ (انیم شب) تک گنے جاتے ہیں، اول الذکر گھنٹوں کو انگریزی میں حروف A.M. سے اور آخر الذکر کو حروف P.M. سے تینز کیا جاتا ہے اور ہم انہیں علی الترتیب ب۔ ن (بعد نیم شب) اور ب۔ ظ (بعد ظہر) سے تینز کرینگے۔ پہلی گنتی میں دن ظہر سے ظہر تک لیا جاتا ہے، ظہر کو ٹیگ کہتے ہیں اور بعد کے گھنٹے علی الترتیب ۱۲ تک گنے جاتے ہیں۔

مثال ۱۔ حسب ذیل مفروضات سے کوکبی وقت میں اوسط شمسی یوم کا طول معلوم کرو۔

بتاریخ ۴ جولائی ۱۸۳۶ء سورج کے مرکز کا ظاہری صعود مستقیم بمقام گرینویچ مرور کے وقت مشاہدہ کرنے سے ۶ گ ۵۴ ۵۳.۳۰ ش معلوم ہوا۔  
اسی طرح بتاریخ ۴ جولائی ۱۸۹۰ء سورج کے مرکز کا صعود مستقیم ۶ گ ۵۳ ۵۴.۶۱ ش معلوم ہوا۔

ہمیں اول وہ کوکبی وقفہ معلوم کرنا ہے جو ۳ جولائی ۱۸۳۶ء کے کوکبی وقت ۶ گ ۵۴ ۵۳.۳۰ ش اور ۴ جولائی ۱۸۹۰ء کے کوکبی وقت ۶ گ ۵۳ ۵۴.۶۱ ش کے درمیان ہے۔

یہ وقفہ ۵۴ سال کا ہے اور اس لیے راس المحل کے مروروں کی تعداد سورج کے مروروں کی تعداد سے ۵۴ زیادہ ہوگی (دفعہ ۶۶ مثال ۱)۔ سورج کے مروروں کی تعداد ۱۹۷۲۳ ہے اور ۷ کے مروروں کی تعداد ۱۹۷۷۷ ہے اور اس لیے پورا وقفہ کوکبی وقت میں

دن گ ۵۳ ۵۴.۶۱ ش - (۶ گ ۵۴ ۵۳.۳۰ ش)

کو ۱۹۷۲۳ سے تقسیم کرنے سے اوسط شمسی یوم کی کوکبی قیمت ۵۶۵۵ ش معلوم ہوتی ہے۔

مثال ۲۔ اوسط شمسی یوم کا طول کوکبی وقت میں حسب مثال سابق

دو لمحوں پر سورج کے صعود مستقیموں کا مقابلہ کرنے سے معلوم کیا گیا ہے، ان لمحوں کا فرق ۳۰ سال ہے۔ ثابت کرو کہ دونوں صعود مستقیموں میں ۵۰ سال تک بڑی خطائیں اس قیمت کو ثانیہ کے ہزارویں حصہ سے زیادہ متاثر نہیں کر سکتیں جو اوسط شمسی یوم کے لیے معلوم کی گئی ہو۔

مثال ۳۔ اوسط شمسی وقت کو کوکبی وقت میں بدلنے کا ایک تقریبی قاعدہ اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے:- ہر ۱۰۰ کے لیے ۱۰ جمع کرو باقی ہر ۱۰۰

کے لیے ۱۰ جمع کرو باقی ہر ۱۰۰ کے لیے ۱۰ جمع کرو۔ اس قاعدہ سے اوسط شمسی یوم کا طول معلوم کرنے میں کیا خطا ہوگی۔

مثال ۴۔ اگر شمسی سال کی مدت کے اس جملہ میں جو اوسط شمسی وقت کے دنوں، گھنٹوں، منٹوں، اور ثانیوں کی رقوم میں ہے دنوں کی تعداد میں ایک کا اضافہ کیا جائے لیکن گھنٹے، منٹ اور ثانیے نہ بدلے جائیں تو نتیجہ شمسی سال کی مدت کو کوکبی وقت کے دنوں، گھنٹوں، منٹوں اور ثانیوں میں بیان کرے گا۔

## ۶۹۔ اوسط ظہر پر کوکبی وقت -

(۲۱۸)

ایک دے ہوئے لمحہ پر اوسط سورج کا صعود مستقیم یا زیادہ صحیح طور پر ۲ اور اوسط سورج کا درمیانی فاصلہ حسب شرح دفعہ ۶۸ سورج کا اوسط طول بلد ہوتا ہے اور اس کے لیے جملہ ہے (مثال ۴ دفعہ ۶۸)

$$۲۸۰۶۴۹۹۲۲ + ۳۶۰ \times \text{ت} \quad \text{ت}$$

جہاں ت، شمسی سال کا طول ہے اور ت، شمسی سال کا وہ کسری حصہ ہے جو یکم جنوری ۱۹۵۷ء کی ظہر سے گزر چکا ہے۔

اس جملہ کو ۱۵۰ فی گھنٹہ کی شرح سے وقت میں تحویل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یکم جنوری گریجویٹ اوسط ظہر کے بعد ت اوسط شمسی ایام پر اوسط سورج کا صعود مستقیم ہے جس کا

$$۵۸۶۸۴۲۱۱۸ + ۵۵۵۵۲ \times \text{ت} \quad \text{ت}$$

ان مشاہدات کی نوعیت جن سے اس جملہ کی پہلی رقم ۱ کی قیمت حاصل کی گئی ہے حسب ذیل طریقہ پر واضح کی جاسکتی ہے۔ سال ۱۹۷۱ کو مساوی حصوں کی ایک کافی تعداد میں تقسیم کرو۔ تقسیم کے ہر نقطہ پر فرض کرو کہ سورج کا صعود مستقیم مشاہدہ کیا گیا ہے اور یہ صعود مستقیم اعلیٰ الترتیب غم، غم، ... ہیں۔ ہم مان لیں گے کہ ان صعود مستقیموں کا اوسط انہی لمحوں پر اوسط سورج کے صعود مستقیموں کے اوسط کے مساوی ہے۔ یہ مفروضہ جائز ہے کیونکہ خاص دوری ریموں میں سے ہر رقم ایک وقفہ میں جس میں سال کے مساوی حصوں کی ٹھیک تعداد شامل ہو تبدیلیوں کے ایک پورے دور میں سے گذرتی ہے۔ اس لیے اگر ہم لمحوں کی ایک ایسی تعداد لیں جو سال کو مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں تو ان میں سے ہر رقم کی اوسط قیمت ان لمحوں پر صفر ہوگی (بشرطیکہ لمحوں کی تعداد کافی بڑی لی گئی ہو، دفعہ ۶۷) پس اصلی اور اوسط سورج کے اوسط صعود مستقیم ان لمحوں پر مساوی ہوں گے۔ ہم اس عمل کو ایسے چہ لمحات لیکر واضح کریں گے۔ فرض کرو کہ ان لمحات پر سورج کے اوسط طول بلد اعلیٰ الترتیب

.....، (۱+۸)، (۱+۸).....

ہیں جہاں اونا معلوم مقدار ہے جسے معلوم کرنا ہے۔ اگر ہم اصلی سوچ کے صعود متقیق (عم، عم، ....) ان لمحوں پر معلوم کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$(\overset{f}{20}+1)+(\overset{f}{17}+1)+(\overset{f}{12}+1)+(\overset{f}{8}+1)+(\overset{f}{5}+1)+1$$

$$1^{\text{st}} + 8^{\text{th}} + 27^{\text{th}} + 64^{\text{th}} + 125^{\text{th}} + 216^{\text{th}} =$$

ماصل کرنے کے لیے ہم ایک مخصوص صورت کے طور پر ہم 'اع' کی قیمتیں حسب ذیل جدول سے لیتے ہیں۔

تساوی الفصل تاریخی

سورج کا صعود و مستقیم

نیوج اوسط وقت (گ۔ ا۔ و)

جنوری ۱۹۵۸ء

23 25 27

مارچ	۲	۲۱	۲۲	۵۴	۱۲	ع
مئی	۲	۱۸	۲	۳۸	۴۱	۲۴ + ع
جولائی	۲	۱۵	۶	۴۵	۴۷	۲۴ + ع
ستمبر	۱	۱۲	۱۰	۴۱	۵۴	۲۴ + ع
نومبر	۱	۹	۱۴	۲۵	۴۰	۲۴ + ع

ضابطہ میں اندراج سے حاصل ہوتا ہے

$$۱۸ = ۱ \text{ گ } ۴۱ \text{ م } ۵۸ \text{ ث}$$

۱ میں ایک ثانیہ سے کم کا خفیف تغیر کرنے سے (جو ضروری ہے جبکہ بہت سی چھوٹی تفصیلات ملحوظ رکھی جائیں جنکا یہاں غور کرنا ممکن نہیں تھا) کی مطلوبہ قیمت حاصل ہوتی ہے

$$۱۸ \text{ گ } ۴۱ \text{ م } ۵۸ \text{ ث}$$

جب اوسط سورج نصف النہار پر آتا ہے تو اس کا صعود مستقیم بلاشبہ اس لمحہ پر کوکبی وقت ہوتا ہے۔ اس لیے ہمیں عملی علم ہیئت کا وہ اہم عنصر ملتا ہے جو اوسط ظہر کے کوکبی وقت کے طور پر مشہور ہے۔ یہ مقدار کوکبی وقت کو اوسط وقت میں اور اوسط وقت کو کوکبی وقت میں تحويل کرنے میں ناگزیر ہے۔ ایفیمرس میں ہر دن کے لیے اوسط ظہر پر کوکبی وقت دیا جاتا ہے۔

۱۹۰۹

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ بقیام گریونج بوقت اوسط ظہر بتاریخ ۲۷ مارچ کوکبی وقت ۱۷ گ ۴۱ م ہے۔

بتاریخ ۲۷ مارچ اوسط ظہر پر یکم جنوری سے وقفہ ۸۵ دن ہے۔  
ت کی بجائے قیمت جملہ

$$۱۸ \text{ گ } ۴۱ \text{ م } ۵۸ \text{ ث} + ۲۳۶۶۵۵۵۴ \text{ ث} =$$

میں درج کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۲۔ معلوم کرو کہ سن ۱۹۰۹ء کی کس تاریخ پر اوسط سورج راس الحمل میں سے گذرتا ہے۔

مثال ۳۔ اگر یہ دیا جائے کہ بنفام گریونج بتاریخ ۲۱ مارچ ۱۸۹۶ء راس الحمل کے محور کے اوسط اوقات بج ۱۰ ۵۹ ۵۸ اور ۲۳ ۵۸ ۳۱ میں تو وہ لمحہ معلوم کرو جس پر گریونج اوسط وقت اور کوکبی وقت مساوی ہوتے ہیں

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ یکم جنوری سن ۱۹۰۹ء کی اوسط ظہر کے بعد ت

اوسط شمسی ایام پر اوسط سورج کا صعود مستقیم گ ۱۸ ۴۲ ۲۳ ۵۱ ۲۳ ۶۵ ۵۵ ۲۳ ت ہے

اور سورج کا اوسط طول بلد ۲۸۰ ۲۶ ۸۱ + ۰ ۵۹ ۸۵ ۶۵ ت ہے۔

۵۔ کوکبی وقت سے اوسط وقت معلوم کرنا۔ (۲۲۰)

کسی مقام پر اوسط شمسی وقت کی تعیین فی الحقیقت بالواسطہ یا بلاواسطہ سورج کے مشاہدات پر منحصر ہوتی ہے۔ ملاحظہ فرمائیے کہ اس سے صبح یا شام کے وقت سورج کا مشاہدہ کر کے وقت معلوم کرتا ہے۔ یہ راست طریقہ کی مثال ہے۔ لیکن ہیئت داں جس کے پاس آلہ سیدس کی بہ نسبت زیادہ بڑی طاقت اور صحت کے ثابت آلات ہوتے ہیں بالعموم اوسط وقت کو کوکبی وقت سے محسوب کر کے اخذ کرتا ہے کوکبی وقت کو جیسا کہ قبل ازیں دفعہ ۶۳ میں سمجھایا جا چکا ہے وہ بعض گھڑی "تاروں" (clock stars) کے مشاہدے سے حاصل کرتا ہے۔ ان گھڑی تاروں کے مقامات ایفیرس سے معلوم ہوتے ہیں۔ یہ مقامات ۲ کے محل پر منحصر ہوتے ہیں جسے شمسی مشاہدات سے متعین کیا جاتا ہے۔ اوسط وقت کو گھڑی تاروں کے ذریعہ معلوم کرنے کا یہ طریقہ ایسا ہے

۱۔ سورج کے مشاہدات صرف بالواسطہ شامل ہیں۔  
۲۔ ایفیرس سے وہ اصلی کوکبی وقت معلوم ہوتا ہے جس پر گھڑی تاروں  
۳۔ انہار کو محور کرتا ہے اور مشاہدہ وہ وقت نوٹ کر لیتا ہے جو اسکی

کو کبھی گھڑی بتاتی ہے۔ ان دو وقتوں کا فرق اس کی گھڑی کی تصحیح ہے اور اس لیے کو کبھی وقت معلوم ہو جاتا ہے۔ ایفیرس سے گریونج اوسط ظہر کا کو کبھی وقت بھی معلوم ہوتا ہے، اس لیے اگر بوقت ظہر اوسط وقت کی گھڑی کا مقابلہ کو کبھی گھڑی کے ساتھ کیا جائے تو اس سے اوسط وقت کی گھڑی کی خطا معلوم ہو جائے گی۔ لیکن بالعموم بوقت ظہر اوسط وقت کی گھڑی اور کو کبھی گھڑی کا مقابلہ نہیں کیا جاسکتا اور نہ بالعموم مشاہد کا طول بلد صفر ہو گا۔ ایسے ہم حسب ذیل عمل کرتے ہیں:-

فرض کر دو کہ گ مقامی کو کبھی وقت ہے

ت اسی آن مقامی اوسط وقت ہے

ل مشاہد کا طول بلد ہے گریونج کے مغرب میں

ن اوسط شمسی ایام کی تعداد ایک شمسی سال میں

$$۳۶۵۶۲۳۲۲ =$$

و وہ کو کبھی وقت ہے جو بمقام گریونج ایک یوم قبل اوسط

ظہر پر تھا۔

ن اوسط شمسی ایام میں ن + کو کبھی ایام ہوتے ہیں، اس لیے شمسی وقت کا کوئی وقفہ مائل کو کبھی وقت میں جزو ضربی (ن + ۱) کے ذریعہ تحویل ہوتا ہے اور کو کبھی وقت کا کوئی وقفہ مائل شمسی وقت میں جزو ضربی ن (ن + ۱) کے ذریعہ تحویل ہوتا ہے۔ مجوزہ صورت میں طول بلد ل ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ اس سے حسب ذیل دو نتیجے حاصل ہوتے ہیں۔

(۱) اس محل کو کبھی وقت کے ل گھنٹوں میں گریونج کے نصف النہار سے مشاہد کے نصف النہار تک حرکت کرے گا۔

(۲) اوسط وقت کے ل گھنٹوں میں اوسط سورج گریونج کے (۲۲۱) نصف النہار سے مشاہد کے نصف النہار تک حرکت کرے گا۔

چونکہ زیر بحث لمحہ پر کو کبھی اور اوسط مقامی اوقات گ ادرت ہیں

اس لیے نتیجہ نکلتا ہے کہ  $گ + ل + اورت + ل$  گریونچ پر متناظر کوکبی اور اوسط اوقات ہیں۔

اوسط وقت کا وقفہ  $ت + ل$  کوکبی وقت میں جسز و ضربی  $(ن + ا)$  ان کے ذریعہ تحویل ہوتا ہے۔ اسے  $گ + ل$  میں سے تفریق کیا جائے تو اسی دن گریونچ کی اوسط ظہر پر کوکبی وقت ملنا چاہئے، اس لیے

$$م = گ + ل - (ن + ا) (ت + ل) \quad ان$$

اس مساوات کو حسب ذیل مائل اشکال میں لکھا جاسکتا ہے جو ایفیرس کی جدولوں کے ساتھ استعمال کرنے میں اکثر سہولت بخش ثابت ہوئی ہیں :-

$$ت + ل = (گ + ل - م) (ن + ا) \quad ان$$

$$گ + ل = م + (ت + ل) (ن + ا) \quad ان$$

کوکبی وقت سے اوسط وقت معلوم کرنے کا سب سے زیادہ عملی طریقہ غالباً حسب ذیل ہے :-

اگر ہم مندرجہ بالا تین مماثل مساواتوں میں سے کسی ایک میں  $ت =$  رکھیں اور اگر مقامی اوسط ظہر کے مقامی کوکبی وقت کو  $م$  بنائیں تو

$$م = م + ل - ل (ن + ا) \quad ان$$

$$یا \quad م = م + ل \quad ان$$

مقدار  $ل$  ان اس مخصوص نصف النہار کے لیے ایک مستقل

مقدار ہے۔ اس کو اگر گریونچ کی اوسط ظہر پر کے کوکبی وقت میں جمع کیا جائے تو مقامی کوکبی وقت مقامی اوسط ظہر پر حاصل ہو جاتا ہے۔ پس یہ جملہ حاصل ہوتا ہے

$$ت = (گ - م) (ن + ا) \quad ان$$

لوں سے بہت ہی آسانی کے ساتھ محسوب کیا جاسکتا ہے جو کوکبی وقفوں کو اوسط وقت کے متناظر وقفوں میں بدلنے کے لیے تیار

مثال ۱۔ اگر بمقام گرینوچ پوزت اوسط ظہر کوکبی وقت ہو تو ثابت کرو کہ ایک مقام پر جس کا طول بلد (گرینوچ کے مغرب میں) ل ہے اسی دن اوسط ظہر پر کوکبی وقت مساوات

$$م = ۵ + ۸۵۶۵ \times ۹$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اگر وقت کا ایک وقفہ سے تعبیر ہو جبکہ اُسے اوسط وقت میں شمار کیا جائے اور ت سے تعبیر ہو جبکہ اُسے کوکبی وقت میں شمار کیا جائے تو

$$ت = ت + ۸۵۶۵ \times ۹$$

$$ت = ت - ۸۲۹۶ \times ۹$$

جہاں پر جملہ کی آخری رقم میں ت اور ت گھنٹوں اور ایک گھنٹے کے کسری حصوں میں بیان کئے گئے ہیں۔ (۲۲۲)

مثال ۳۔ بتاریخ ۱۸ فروری ۱۹۰۹ء بمقام گرینوچ اوسط ظہر پر کوکبی وقت ۲۱ ۵۱ ۱۳۵۵ ت ہے۔ ثابت کرو کہ راس الحمل کا مَرُور

۲ ۸ ۳۵ ۲۵ ت اوسط وقت پر واقع ہوتا ہے۔  
مثال ۴۔ ثابت کرو کہ بمقام گرینوچ کوکبی ظہر کا گرینوچ اوسط وقت

یہ ہے

$$(۲۲ - م) \times (۱ + ن)$$

جہاں م، اوسط ظہر پر کوکبی وقت ہے اور ن، شمسی سال میں اوسط شمسی ایام کی تعداد ہے۔

نیز ثابت کرو کہ مغربی طول بلد ل پر کوکبی ظہر کا مقامی اوسط وقت، گرینوچ پر کوکبی ظہر کے گرینوچ اوسط وقت میں سے  $(۱ + ن) \times$  تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

نوٹ :- کوکبی ظہر سے ۷ کے بالائی تکبید کا لمحہ مراد ہے۔



مثال ۵۔ ثابت کرو کہ بتاریخ یکم نومبر ۱۹۰۸ء اب۔ ظہر گریونج اوسط وقت پر بمقام مدراس کوکبی وقت ۲۱ گ ۲۹ ش ہے اگر مدراس کا طول بلد ۵ گ ۲۱ ش ہے اور گریونج پر وقت اوسط ظہر کوکبی وقت ۱۴ گ ۱۴ ش ہو۔

مثال ۶۔ کولمبیا کالج نیویارک طول بلد ۴ گ ۵۵ م ۵۴ ش مغرب میں بتاریخ ۱۲ دسمبر ۱۹۰۸ء گریونج پر وقت اوسط ظہر کوکبی وقت ۱۴ گ ۲۳ ش ہے۔

ثابت کرو کہ اسی دن جبکہ کولمبیا کالج پر کوکبی وقت ۲۰ گ ۲۸ ش ہو تو مقامی اوسط وقت ۲ گ ۳۴ م ۴۱ ش ہوگا۔

مثال ۷۔ وہ کوکبی وقت جس پر سورج کا نیم قطر بتاریخ یکم جولائی نصف النہار کو عبور کرتا ہے ۴ گ ۴۸ ش ہے۔ ثابت کرو کہ متناظر اوسط وقت کوکبی وقت سے ۱۹ گ ۱۸ ش تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

۸۔ ارضی تاریخ خط۔

ذیل کی ایک مخصوص مثال کے ذریعہ ارضی تاریخ خط کا مطلب ذہن نشین کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ بنگال گریونج بروز چہار شنبہ بتاریخ ۱۴ جون ۱۹۰۵ء وقت ۱۰ ب۔ ۱۱ ش ہے ہمیں یہ غور کرنا ہے کہ اسی آن ہر دیگر نصف النہار (مشرق یا مغرب) پر کیا وقت ہے اور خاص کر کونسا دن ہے۔

نصف النہار ۹ گ ۵۹ (گریونج کے مغرب) پر بمقام آن پر وقت کے بعد ہے یعنی چہار شنبہ کا آغاز ہو چکا ہے۔ لیکن نصف النہار ۱۱ گ ۵۹ ب۔ ظ ہے اور اس لیے اس نصف النہار

ابھی سہ شنبہ ہے اور تاریخ ۱۳ جون ہے۔ اگر ہم یہ تصور کریں کہ سطح ارض کے ہر نصف النہار پر ایک چٹ لگی ہوئی ہے جس پر گریجویٹ کے ۱۲ جون ۱۹۰۹ء کے وقت ۱۰ ب۔ ن کے جواب میں ہفتہ (یا مہینہ) کا دن لکھا ہوا ہے تو ان چٹوں پر کے ناموں میں اچانک تبدیلی ہوگی جب ہم اس نصف النہار پر پہنچیں گے جو گریجویٹ سے ۱۰ غ پر ہے۔

لیکن یہ یہ آسانی معلوم ہوتا ہے کہ تسلسل کی ایک اور شکست کسی دوسرے نصف النہار پر واقع ہونی چاہئے۔ کیونکہ یہ تصور کرو کہ ہم خیال کی سرعت کے ساتھ پوری زمین کے گرد نصف النہار ۱۰ سے مغرب کی جانب حرکت کر سکتے ہیں تو ہم ان نصف النہاروں کو عبور کرتے ہوئے چلیں گے جن پر سہ شنبہ کی چٹ لگی ہے لیکن جب سفر قریب الختم ہوا اور ہم مشرق سے نصف النہار ۱۰ کی طرف آ رہے ہوں تو ہم دیکھیں گے کہ نصف النہاروں پر چار شنبہ کی چٹ لگی ہے۔ اس لیے ایک نصف النہار سے جس پر ایک دن کی چٹ لگی ہے اس نصف النہار تک جس پر دوسرے دن کی چٹ لگی ہے کوئی اور تاریخ کی تبدیلی عمل میں آچکی ہے۔

نصف النہاروں پر کی چٹوں میں تسلسل کی یہ دوسری شکست اس طرح پیدا نہیں ہو سکتی جس طرح کہ نیم شب کے وقوع سے ہوئی تھی۔ نیم شب کے نقطے پر تبدیلی غلط سمت میں ہوگی اور بلا شبہ ۱۰ غ ہی پوری سطح زمین پر وہ نصف النہار ہے جہاں اس وقت آدمی رات ہوگی۔ اس لیے عرض بلد کے ہر توازی میں ایک دوسرا نقطہ ہونا چاہئے جس پر تاریخوں کے تسلسل میں جو اس توازی پر کے مختلف مقامات سے متعلق ہیں ایک شکست ہو۔ اس مقصد کے لیے توازی پر کا کوئی نقطہ مقرر کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے ہم عام سہولت کا لحاظ کرتے اسے اختیاری طور پر منتخب کرتے ہیں چنانچہ اس قرارداد کی پیروی کی جاتی ہے کہ یہ نقطہ گریجویٹ سے نصف النہار ۱۲ سے حتی الامکان قریب واقع ہو اگر وہ اس نصف النہار پر فی الواقع نہ لیا جاسکے حقیقی تاریخ خط جیسا کہ وہ موسوم ہے غلب سے غلب

کھینچا جاتا ہے۔ جہاں تک کہ ۱۲ کا نصف النہار کھلے سمندر میں سے گذرنا ہے یہ تاریخ خط اس نصف النہار پر منطبق ہوتا ہے اور عریضی اس کے راستہ کا زیادہ حصہ سمندر میں سے گذرتا ہے۔ دوسرے مقامات پر یہ تاریخ خط ۱۲ کے نصف النہار کی ایک یا دوسری جانب قدرے جھولتا ہے تاکہ وہ مثلاً آباد علاقے آلاسکا (Alaska) میں سے نہ گذرنے پائے یا جزائر الیشین کی ایسی تقسیم نہ کر دے کہ اس سے وہاں کے باشندوں کو تکلیف ہو۔  
 مجوزہ صورت میں ۱۰ غ تک تمام مغربی طول بلدوں پر دن چار شنبہ اور تاریخ ۱۲ جون ہے۔ مغربی طول بلدوں کے دو اور گھنٹوں کے لیے یعنی ۱۰ غ سے ۱۲ غ تک یا زیادہ صحیح طور پر ۱۰ غ سے اس نقطے تک جہاں تاریخ خط عبور کرتا ہے دن سہ شنبہ ہے اور تاریخ ۱۳ جون لیکن چونکہ یہ توازی تاریخ خط کو عبور کرتا ہے اس لیے تاریخ دفعتاً بدلتی ہے چنانچہ اس خط کے مین قریب ایک جانب وقت ۱۰ ب۔ ظ۔ دن سہ شنبہ تاریخ ۱۳ جون ہوتی ہے تو دوسری جانب وقت ۱۰ ب۔ ظ۔ دن چار شنبہ تاریخ ۱۴ جون ہوتی ہے۔ اس طرح جب سے تقریباً ۱۲ تک تمام مشرقی طول بلدوں پر دن چار شنبہ اور تاریخ ۱۴ جون ہے۔ پس یہ معلوم ہوا کہ زیر بحث لمحہ پر طول بلد کے تقریباً ۲۲ گھنٹے چار شنبہ کا دن ۱۴ جون کی تاریخ رکھتے ہیں اور دو گھنٹے سہ شنبہ کا دن ۱۳ جون کی تاریخ رکھتے ہیں۔ دوسری مثال کے طور پر فرض کرو کہ یک شنبہ کے دن گریجویٹ پر وقت ۶ ب۔ ظ۔ ہے۔ اس لیے طول بلد ۵۹ مہر پر وقت ۱۱ ب۔ ظ۔ اور ۱۰ گھنٹہ ہے لیکن طول بلد ۶ مہر پر وقت ۱۱ ب۔ ظ۔ اور دن دو شنبہ جیسے ہم طول بلد ۶ مہر سے مشرقاً طول بلد ۱۲ مہر تک یا زیادہ۔ پس توازی پر کے تاریخ خط تک حرکت کرتے ہیں دن دو شنبہ ہے۔

(۲۲۲)

لیکن تاریخ خط پر (جہاں حقیقی وقت تقریباً ۶ ب - ن ہے) دن وقتاً ہی ساعت پر یکشنبہ میں بدل جاتا ہے اور تاریخ خط سے گریونچ تک تمام مغربی طول بلدوں پر یکشنبہ رہتا ہے۔

## نویں باب پر مثالیں

مثال ۱۔ اگر سورج کا طول بلد لہ ہو، اس کا صعود مستقیم <sup>الشمس کا</sup> اور طویل میلان سے تو ثابت کرو کہ لہ۔ عہ کی بڑی سے بڑی قیمت اس وقت واقع ہوتی ہے جبکہ مس لہ = نقطہ سے اور مس عہ = راجم سے۔

مثال ۲۔ بتاریخ ۲۲۔ ستمبر سورج کا میل مرور پر ۱۷۰° ۲۸' ۲۸" مشاہدہ کیا گیا اور بتاریخ ۲۳۔ ستمبر اس کا میل ۱۷۰° ۵۶' ۲۱" ج مشاہدہ کیا گیا۔ نیز ان دو مروروں کا کوکبی وقفہ ۲۴' ۳۵" تھا۔ دوسرے مشاہدہ پر سورج کا صعود مستقیم کیا تھا؟

[Coll. Exam.]

اس مثال کے طریقہ سے اس المثل معلوم کرنے میں خاص خطاؤں کے واقع ہونے کا کہاں امکان ہے۔

مثال ۳۔ قطب تارہ کا صعود مستقیم ۳۱° ۲۸' ہے۔ گریونچ پر اوسط ظہر کے کوکبی اوقات بتواریخ ۱۱۔ اور ۱۲۔ اپریل علی الترتیب ۱۹° ۵۶' ۵۰" اور ۲۳° ۱۵' ۴۸" ہیں۔ گریونچ پر بتواریخ ۱۱۔ اپریل قطب تارے کے قین مروروں کے اوسط اوقات معلوم کرو۔

[Coll. Exam.]

مثال ۴۔ بحری جہت سے مس ذیل چیزیں دی گئی ہیں:-

اوسط ظہر کا کوکبی وقت بتاریخ ۲۱۔ مارچ ۱۸۹۸ء ۲۳° ۵۶' ۵۸"

بتاریخ ۲۲۔ مارچ ۱۸۹۸ء ۲۴° ۵۶' ۵۸"

تقریبی طور پر وہ اوسط وقت معلوم کرو جس پر اوسط سورج اعتدال ربیع سے گذرنا تھا۔

[Coll. Exam.]

مثال ۵۔ ایک ستارہ جس کا صعود مستقیم  $۵^{\circ} ۳۶' ۹''$  ہے بتاریخ ۶ فروری بمقام سیڈنی (طول بلد  $۱۵۱^{\circ} ۱۲' ۳۱''$ ) مَرور میں ہے جبکہ مشاہد کی گھڑی میں مقامی وقت  $۸^{\text{ بجے } ۳۰^{\text{ منٹ}}$  ہے۔ اگر گھڑی پر بتاریخ ۶ فروری اوسط ہفت روزہ سورج کا صعود مستقیم  $۲۱^{\circ} ۸' ۶۱''$  ہو اور اگر کوکبی وقت کا ایک گھنٹہ اوسط وقت کے  $۵۹' ۵۰''$  کے معادل ہو تو قریب ترین ثانیہ تک معلوم کرو کہ گھڑی کتنا درست یا تیز ہے۔

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ ایک معلوم ستارہ کا ایک واحد ارتفاع عرض بلد معلوم کرنے کے لیے کافی ہے اگر مقامی کوکبی وقت معلوم ہو اور مقامی کوکبی وقت معلوم کرنے کے لیے کافی ہے اگر عرض بلد معلوم ہو۔  
اگر مشاہدہ کردہ ارتفاع میں قوس کے لامنتوں کی خطا ہو تو ماخذ کوکبی وقت میں وقت کے  $\frac{1}{15}$  لافظ لہ رقم لامنتوں کی خطا ہوگی جہاں لہ مقام کا عرض بلد ہے اور لہ مشاہدہ کی ان پرستارہ کا سمت ہے۔

(۲۲۵)

مثال ۷۔ میں ضہ کے ایک ستارہ کا راسی فاصلہ ی ہے جبکہ اسے نصف النہار کے قریب سامتی زاوے ت پر مشاہد کیا گیا۔ اگر ضہ بہت چھوٹا نہیں ہے تو ثابت کرو کہ عرض بلد مساوات

$$\text{فہ} = \text{ی} - \text{ضہ} \quad \frac{\text{جمع ضہ جمع فہ}}{\text{جب } \frac{1}{15} \text{ ت}} \quad \text{جب (فہ - ضہ)}$$

سے صحیح طور پر معلوم کیا جاسکتا ہے جس کی آخری رقم میں فہ کی ایک تقریری قیمت استعمال کی جاسکتی ہے۔

مثال ۸۔ اگر وہ کوکبی اوقات جبکہ سورج نصف النہار کی ہر جانب مساوی ارتفاعوں پر پہنچتا ہے  $\epsilon$  اور  $\epsilon'$  ہوں اور اگر اس وقفہ میں سورج کے کی تبدیلی فرضہ ہو اور اگر سورج کا صعود مستقیم بوقت مَرور  $\epsilon$  ہو تو اصلی کوکبی وقت حاصل کرنے کے لیے گھڑی کے وقت میں جو

$$\text{نہ} - \frac{1}{15} (\epsilon + \epsilon') - \frac{1}{15} \left( \frac{\text{مس ضہ}}{\text{مس فہ}} - \frac{\text{مس ضہ}}{\text{مس فہ}} \right) \text{ جب } \frac{1}{15} (\epsilon - \epsilon') \text{ فرضہ}$$

ہے۔ نیز یہ سمجھاؤ کہ ان دو مشاہدات کے درمیان صعود مستقیم میں سورج کی جو حرکت ہے اس کو محسوب کرنے کی ضرورت کیوں نہیں ہے۔

**مثال ۹۔** اگر سورج کا راسی فاصلہ، نصف النہار سے قریب 'ل' ضہ مشاہدہ کیا جائے جبکہ اس کا میل ضہ ہے اور اگر وقت کے ثانیوں میں اس کا ساعتی زاویہ س ہو تو ثابت کرو کہ مقام کا عرض بلد تقریباً

$$ل - \frac{\text{جم ل جم ضہ جب } \alpha}{2 \text{ جب } (ل - ضہ)} (15 \text{ س})$$

ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر یہ مشاہدہ ایک جہاز سے کیا جائے جو نصف النہار کے ساتھ زاویہ طہ بنانے والی سمت میں حرکت کر رہا ہے تو بڑے سے بڑا ارتفاع اس وقت واقع ہوتا ہے جبکہ سورج فوری نصف النہار سے وقت کے تقریباً ۷۰ ثانیوں پر ہو جہاں

$$\frac{1}{\text{جم ضہ}} = \frac{\text{جم ضہ} - \text{جم طہ}}{\text{جم ضہ} - \text{جم } \alpha} (15 \times 4 \times \text{جب } \alpha)$$
 جس میں وہ طول ہے جو جہاز فی گھنٹہ طے کرتا ہے، زمین کا نصف قطر ہے، مقام کا عرض بلد ضہ، سورج کا میل ضہ، اور میل کی تبدیلی فی گھنٹہ قوس کے ثانیوں میں م ہے۔



## دسواں باب

### سورج کی ظاہری سالانہ حرکت

صفحہ

۳۴۸

۳۵۴

۳۵۸

۳۶۱

۳۶۴

۳۷۱

۳۷۸

دفعہ  
۷۲ - استواء کی تحویل

۷۳ - مرکز کی مساوات

۷۴ - وقت کی مساوات

۷۵ - وقت کی مساوات سے متعلق ضابطے

۷۶ - وقت کی مساوات کی ترسیمی تعبیر

۷۷ - وقت کی نقیم مساوات کی عام تحقیق

۷۸ - موسموں کا سبب

۷۲ - جب سورج طریق الشمس پر اپنا سالانہ دور شروع کرتا ہے تو اس کا اصلی طول بلد ۵ ج ۲ سے اس سمت میں ناپا جاتا ہے جس میں وہ حرکت کرتا ہے اگرچہ یکساں طور پر نہیں مگر مسلسل بڑھتا ہے۔ اسی طرح سورج کا صعود مستقیم ۷۷ اگرچہ یکساں طور پر نہیں مگر مسلسل بڑھتا ہے۔ ج کے صعود مستقیم اور طول بلد کے درمیان فرق یعنی مقدار (ع - ۵) ج کے طول بلد میں جمع کرنی ہوگی تاکہ اس کا صعود مستقیم حاصل ہو۔ اب ہم یہ غور کریں گے کہ دوران سال میں سورج کی تحویل کب ہوتی ہے۔ یہ مان لیا جاتا ہے کہ سورج کا

مرکز طریق الشمس میں رہتا ہے کیونکہ یہاں اس کے چھوٹے عرض بلد کو جو اُسے کم ہے حساب میں شامل کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ فرض کرو کہ طریق الشمس پر کے ایک نقطہ کا صعود مستقیم ۷۰ اور میل ضہ ہے۔ اس نقطہ کا طول بلد ۵۰ ہے اور اگر طریق الشمس کا میلان ۷۰ ہو تو مس ۷۰ = جم ۷۰ مس ۷۰ ..... (۱)

اور جم اس مساوات کو

جب (ع - ۵) = مس ۲ ۱/۲ سے جب (ع + ۵) ..... (۲)

میں تحویل کر سکتے ہیں۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ ع - ۵ کو حدود - جب اس ۲ ۱/۲ سے اور + جب اس ۲ ۱/۲ سے کے درمیان واقع ہونا چاہئے۔ یعنی اگر سے کی بجائے اس کی اوسط قیمت بابہ ۱۹۱ ۲۳ ۲۶ ۲۷ کی جائے تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ استواء کی تحویل - طہ اور + طہ کے درمیان متغیر ہوتی ہے جہاں طہ = ۲۸ ۲۸ - ۵ کے صفر سے ۳۶۰ تک بڑھنے میں اس تحویل کے جو تغیرات واقع ہوتے ہیں ذیل کے طریقہ پر واضح کئے جا سکتے ہیں۔

جس وقت ع اور ۵ ایک ساتھ ۷۰ سے چلتے ہیں جہاں وہ دونوں صفر ہیں تو ۵ اولاً بڑا ہوتا ہے اور اس لیے تحویل اولاً منفی ہوتی ہے اور اقل قیمت - طہ پر اس وقت پہنچتی ہے جبکہ ۵ ۲۵ + ۱/۲ طہ ہو۔ اس کے بعد صعود مستقیم طول بلد سے ملنے کے لیے بڑھنے لگتا ہے چنانچہ ۵ اور ع ایک ساتھ ۹۰ پر پہنچتے ہیں اور تحویل یہاں صفر ہوتی ہے۔ دوسرے ربع میں صعود مستقیم ع سے بتدریج آگے بڑھنے لگتا ہے اور جبکہ ع ۱۳۵ + ۱/۲ طہ ہو جاتا ہے تو ۵ ۱۳۵ - ۱/۲ طہ پر ہوتا ہے اور تحویل اپنی اعظم قیمت + طہ تک پہنچتی ہے۔ تیسرے ربع میں تحویل دوسرے اقل - طہ تک جاتی ہے جبکہ ۵ = ۲۲۵ + ۱/۲ طہ اور چوتھے ربع میں تحویل دوسرے اعظم + طہ تک پہنچتی ہے جبکہ ۵ = ۳۱۵ - ۱/۲ طہ۔ بالآخر ۵ اور ع کی قیمتیں ۳۶۰ پر منطبق ہو جاتی ہیں جبکہ دور دورا ہو چکنا ہے۔

استواء کی تحویل محسوب کرنے میں ہم ضابطہ (۳) کو استعمال کرتے ہیں جو



ضابطہ (۱) سے آسانی سے ماخوذ ہوتا ہے

مس (ع- ۵) = مس  $\frac{1}{4}$  جب  $۵۲ \frac{1}{4}$  (۱ + مس  $\frac{1}{4}$  سے جم ۵۲) ... (۳)  
اس ضابطہ سے تحویل فوراً حاصل ہوتی ہے اگر کوئی طول بلد دیا گیا ہو۔ نیز اس میں  
سہولت ہے کہ (ع- ۵) کے لیے ایک جملہ ایک سلسلہ کی شکل میں حاصل  
کیا جائے جو چھوٹی مقدار مس  $\frac{1}{4}$  سے کی صعودی قوتوں میں ترتیب یافتہ  
ہو۔ یہ سب سے زیادہ آسانی کے ساتھ مساوات (۱) سے ایک مشہور پھیلاؤ  
کے ذریعہ ماخوذ ہوتا ہے (دیکھو ماڈل ہنر کا علم مثلث مستوی صفحہ ۲۳۸)۔

$$ع- ۵ = مس \frac{1}{4} \text{ جب } ۵۲ + مس \frac{1}{4} \text{ جب } ۵۴ - مس \frac{1}{4} \text{ جب } ۵۶$$

(۴) + .....

اس ضابطہ کی رقیں نیم قطری زاویوں میں بیان ہوئی ہیں اس لیے اگر  
ہر نیم قطری زاویہ کی بجائے اس کا محاصل  $۵۲ \frac{1}{4} \times ۲ \times ۱۸۰ = ۱۸۷۲۰$  وقت کے  
ثانیہ لگھا جائے تو یہ ضابطہ زیادہ سہولت بخش شکل میں بیان ہو جاتا ہے۔ اگر  
ہم (۴) میں دے ہوئے (ع- ۵) کے جملہ کو  $۱۸۷۲۰$  سے ضرب دیں اور  
اگر اسے کی بجائے اس کی اوسط قیمت جو اوپر دی جا چکی ہے درج کر کے اسکی  
مزید تحویل کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$ع- ۵ = ۵۹۲۶۳۸ \text{ جب } ۵۲ + ۱۲۶۷۶۶ \text{ جب } ۵۴ - ۶۳۶۰۰ \text{ جب } ۵۶$$

(۵) .....

سلسلہ (۵) کی رقموں کے سر اس قدر سرعت سے گھٹتے ہیں کہ اس کی  
مندرجہ بالا تین رقموں سے زیادہ رقموں کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔  
آخری رقم کو بھی نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

ہم یہ تسلیم کر لیں کہ (۴) کی دو رقموں سے زیادہ رقیں مطلوب نہیں  
ہیں اور سری طرح سے ضابطہ (۳) سے حاصل ہو سکتی ہیں کیونکہ  
اس کے سلسلہ سے حاصل ہوتا ہے



کے بھی مساوی ہے۔ اس لیے

مس ع پ د = جم س مس د پ ج = جم س مس ۵  
اس لیے ع پ د = ع اور چونکہ ج ا پ = ج پ ا = ۵ اس لیے  
پ و ج = ۵ - ع -

مثال ۲۔ حسب ذیل عمل ثابت کرو۔ کوئی خط ا ب لو اور اس کا  
حصہ ا ج ایسا قطع کرو کہ ا ج = ا ب جم س۔ خط ا ب کے نقطہ ا پر  
عمود ال کھڑا کرو۔ خط ج پ کھینچو کہ وہ ال سے پ پر ملے اور  
زاویہ ا ج پ = ۵۔ ب پ کو ملاؤ۔ تب زاویہ ا ب پ = ع  
اور زاویہ ب پ ج استواء کی تحویل ہے۔

مثال ۳۔ مثال ۱ سے ثابت کرو کہ تحویل کی بڑی سے بڑی قیمت  
جب (مس ۱/۲ س) ہے اور اس صورت میں ا پ (مثال ۲) اس دائرہ کا  
ماس ہے جو ج ب پ کا حائل ہے اور یہ کہ ع اور ۵ متتام ہیں۔

مثال ۴۔ اگر یہ فرض کیا جائے کہ سورج طریق الشمس میں یکساں  
طور پر حرکت کرتا ہے اور دوسرا جرم خط استواء میں اسی یکساں شرح سے حرکت  
کرتا ہے تو ثابت کرو کہ ان کے صعود مستقیموں کا فرق سال میں چار دفعہ صرف  
اُس صورت میں معدوم ہو گا کہ راس الحمل کے نقطہ میں سے ان کے عبور  
درمیان وقفہ سال کے جب (مس ۱/۲ س) ۲۲ حصہ سے کم ہو۔

[Coll. Exam.]

فرض کرو کہ سال کی وہ کسرت ہے جو ۲ سے سورج کے عبور  
اور ۲ سے اُس جرم کے عبور کے درمیان گزر چکی ہے جو خط استواء میں  
حرکت کر رہا ہے۔

اگر ان دونوں اجسام کے صعود مستقیم ع ہوں تو

مس (۲۲ ت + ع) جم س = مس ع

س کے لیے مساوات ملتی ہے

س ع مس ۲۲ ت - (۱ - جم س) س ع + مس ۲۲ ت جم س = ۰

اس مساوات کی اصلیں حقیقی ہوں گی اگر

$$۲۲ ت > جب ۱ (مس ۱/۲ سے)$$

اس لیے مس ع کی دو حقیقی قیمتیں ہوں گی اور ع کی چار۔

مثال ۵۔ یہ تسلیم کر کے کہ سورج کا ظاہری مدار دائری ہے ثابت کرو ایک اعتدال پر اور ایک انقلاب پر نصف النہار کو عبور کرنے میں سورج کے قطر کو جو کو کبی وقت لگتے ہیں ان میں نسبت تقریباً (جم سے - ۱۰۰۲۴، جب ۱ سے) ہے جہاں طریق الشمس کا میلان سے ہے۔

اگر سورج کا نصف قطر  $r$  اور اس کا میل  $\delta$  ہے تو اس لمحہ پر جبکہ سورج کا اگلا کنارہ نصف النہار پر ہو اس کے مرکز کا ساعتی زاویہ -  $r$  قط  $\delta$  ہے اس لمحہ پر کو کبی وقت  $t$  اور سورج کا صعود مستقیم عم ہو تو

$$ت - عم = - r \text{ قط } \delta$$

اسی طرح پچھلا کنارہ نصف النہار پر ہو تو

$$ت - عم = + r \text{ قط } \delta$$

اور اس لیے (ت -  $t$ ) - (عم -  $\delta$ ) =  $۲ r \text{ قط } \delta$

مساوات مس ع = جم سے مس  $\delta$  کو تفرق کرنے اور جم  $\delta =$  جم ع  $\delta$  حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \text{جم سے قط } \delta \frac{\text{فرع}}{\text{فرت}}$$

لیکن چونکہ  $t$  ایک دن میں  $۳۶۰^\circ$  تک بڑھتا ہے اور  $\delta$  تقریباً  $۳۶۵$  دنوں میں اسی قدر بڑھتا ہے اس لیے

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \frac{۱}{۳۶۵} = ۱۰۰۲۴$$

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = ۱۰۰۲۴ \text{ جم سے قط } \delta$$

اس طرح

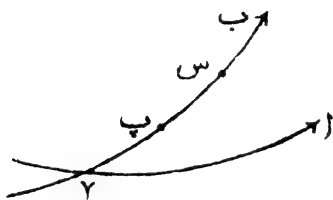
$$عم - عم = (ت - t) \frac{\text{فرع}}{\text{فرت}}$$

اور

اس لیے (ت-۱) {۱-۰۰۲۴} جم سے قط<sup>۲</sup> ضہ = ۲ ص قط ضہ  
یا ت-۲ = ۲ ص {۱-۰۰۲۴} جم سے قط ضہ =  
اعتدالوں پر ضہ = ۰ اور انقلابوں پر ضہ =  $\pm$  ۲۳° ۴۴' اس لیے اعتدال  
پر سورج کے قطر کو نصف النہار عبور کرنے میں جو کو کبھی وقت لگتا ہے اُس میں  
اور انقلاب پر کے کو کبھی وقت میں ذیل کی نسبت ہے  
(جم سے -۰۰۲۴) \ (۱-۰۰۲۴) جم سے = جم سے -۰۰۲۴ جب<sup>۲</sup> سے

### ۳-۷ - مرکز کی مساوات - (۲۳۰)

فرض کرو کہ خط استواء ۲ اور طریق الشمس ۲ ب (شکل ۶۵)  
ہے جہاں سورج کا محل مں ہے اور سورج کے ظاہری مدار کا قریب ارضی  
پا ہے یعنی وہ نقطہ جس پر سورج زمین سے قریب ترین  
(Perigee) ہوتا ہے -



شکل (۶۵)

نیز فرض کرو کہ ۲ پ = ص ' قریب ارضی کا طول بلد  
پ مں = و ' سورج کی اصلی بے قاعدگی  
۲ مں = ۵ = ص + و ' سورج کا اصلی طول بلد  
فرض کرو کہ پورے سال کے لیے اُس ظاہری زاویہ کی اوسط قیمت  
جو زمین کے مرکز سے سورج کے مرکز تک پہنچا ہوا سمتی و تر روزانہ عبور  
ہے - سورج کا اوسط طول بلد ل = ن ت + ص سے بیان ہوتا ہے

جہاں ت، دِنوں میں وقت ہے اور صہ اوسط طول بلد کی قیمت ہے اُس  
آن پر جہاں سے وقت کی پیمائش ہوتی ہے۔ سورج کی اوسط بے قاعدگی  
لی۔ صہ ہے اور اس کے جواب میں اصلی بے قاعدگی ۵۔ صہ ہے۔  
دفعہ ۵۲ میں ہم وہ رشتہ معلوم کر چکے ہیں جو ایک ناقصی مدار میں  
اصلی بے قاعدگی اور اوسط بے قاعدگی کے درمیان ہوتا ہے۔ محمولہ بالا  
دفعہ کے ضابطہ میں وکی بجائے ۵۔ صہ اور ط کی بجائے لی۔ صہ درج  
کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۵ = لی + (۲ - ز) \frac{۱}{۴} ز جب (لی - صہ) + \frac{۵}{۴} ز جب (لی - ۲) صہ$$

$$+ \frac{۱۳}{۱۴} ز جب (لی - ۳) صہ - (۱)$$

جہاں ز زمین کے مدار کا خروج المکرز ہے۔

وہ نہیں جن میں ز شامل ہے اس قدر چھوٹی ہیں کہ اکثر مقاصد میں  
ان کی ضرورت نہیں پڑتی۔ ہم انہیں حسب سابق نظر انداز کریں گے اور  
صرف یہ لکھیں گے

$$۵ = لی + ۲ ز جب (لی - صہ) + \frac{۵}{۴} ز جب (لی - ۲) صہ ... (۲)$$

پس ہمیں سورج کے اوسط طول بلد کی رقوم میں اس کے اصلی طول بلد کے لیے  
ایک جملہ حاصل ہو گیا۔

(۲۳۱) اس سلسلہ کو اٹانے سے اور ز کی دوسری سے اعلیٰ قوتوں کو ترک  
کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$لی = ۵ - ۲ ز جب (۵ - صہ) + \frac{۳}{۴} ز جب (۵۲ - ۲) صہ ... (۳)$$

اس سے سورج کا اوسط طول بلد اس کے اصلی طول بلد کی رقوم میں معلوم  
ہوتا ہے۔

اب ز اور صہ کی عددی قیمتوں کا جاننا ضروری ہے اور ہم دکھائیے  
کہ سورج کے صعود و مستقیم کے مسلسل مشاہدات سے یہ مقادیر کس طرح  
معلوم ہو سکتی ہیں۔ یہ ضابطہ (۲) کے ذریعہ کیا جاتا ہے۔ اس ضابطہ کو



حاصل کیجا چکی ہے اور اس لیے مساواتوں کے نظام سے ن معلوم کر لینے کے بعد ۳۶۰ ن حاصل ہوتا ہے۔ مقدار صہ زیر بحث آن پر سورج کا اوسط طول بلد ہے۔ پس ہمیں لی کے لیے وہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے جو ایک زیادہ ابتدائی طریقہ سے قبل ازیں معلوم کیا جا چکا ہے دفعہ ۶،

اب صرف یہ رہ گیا ہے کہ مساواتوں (۲) اور (۳) کی عددی شکیلیں زمین کے مدار کے خروج المکرز اور حہ کی اصلی قیمتیں درج کر کے معلوم کی جائیں۔ قیمتیں مندرجہ کے لیے حسب ذیل ہیں

نر = ۶۰۱۶۷۵ - حہ = ۱۳۰۸۱

اور اگرچہ ان غللوں کی باعث جن کا سبب دوسرے سیارے ہیں یہ مقداریں ٹھیک ٹھیک مستقل نہیں ہیں تاہم سال بہ سال ان کی تبدیلیاں ہفتہ خفیف ہوتی ہیں کہ ہمارے موجودہ مقصد کے لیے کوئی اہمیت نہیں رکھتیں۔ ان قیمتوں کو درج کرنے اور ایک نیم قطری زاویہ کی بجائے ۳۸ ۳۴ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$5 = 0 + 15r + 2(2r - 1) + 2(2r - 1) \dots (5)$$

$$L = 5 - 1512 \text{ آجیب } (5 - 28112) + 54 \text{ آجیب } (52 - 20212) \cdot (6)$$

پس ہم حسب ذیل تقریبی بیانات دے سکتے ہیں:-

کسی آن پرنسورج کا اصلی طول بلدہ ۵۰ اسی آن پراس کے  
اوسط طول بلدل میں وہ مقدار جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے  
جس کی تعریف مرکز کی مساوات کے طور پر دفعہ ۵۲ میں کیجا چکی  
ہے اور جس کے لیے اب ہم نے یہ جملہ

۱۱۵ اَجَب (ج-۲۸۱)

حاصل کیا ہے۔



کسی آن پر سورج کا اوسط طول بلد ل، اسی آن پر سورج کے  
اصلی طول بلد ۵ میں مقدار

۱۱۵- جب (۵-۲۸۱)

جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱- ثابت کرو کہ مرکز کی مساوات کبھی صفر نہیں ہوتی الا آنکہ سورج  
اوجین میں سے ایک پر ہو۔

\* مثال ۲- ثابت کرو کہ اگر قوس کے ثانیوں کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو  
ضابطہ (۵) ہو جاتا ہے

$$۵ = ل + ۳۲۲۰ \text{ جب } ل + ۶۸۰۰ \text{ جم } ل - ۶۸۰۰ \text{ جب } ل + ۲۸۰۰ \text{ جم } ل$$

۴- وقت کی مساوات

اب ہم سورج کے صعود مستقیم ۷ کو اس کے اوسط طول بلد ل کی  
رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔ کیونکہ اگر سورج کا اصلی طول بلد ۵ ہو تو وقت  
۲ اور ۳ سے

$$۷ = ۵ - \text{مس} \frac{۱}{۴} \text{ سے جب } ۵۲ + \frac{۱}{۴} \text{ مس} \frac{۱}{۴} \text{ سے جب } ۵۲$$

$$۵ = ل + ۲ \text{ جب } (ل - ۷) + \frac{۵}{۴} \text{ ز جب } (۲ - ل - ۷)$$

۷ کے اس جملہ میں جول کی رقوم میں حاصل ہوتا ہے متعدد قسمیں  
چھوٹے سروں کے ساتھ شامل ہوتی ہیں۔ ضابطوں میں ایسی رقوموں کا  
رکھنا ضروری نہیں ہے جو اس قدر چھوٹی ہوں کہ ان سے کوئی قابل قدر  
اثر نہ اٹھیں ہوتا اس لیے ہم ز اور مس  $\frac{۱}{۴}$  سے کی کوئی وہ قوت یا  
اصل ضرب نہیں رکھیں گے جو ۱۰۰۰۰ سے کم ہو۔ یہ شرط

$$۱۱۲۳۵۲۱۱ = ز = ۵۹۶۰۰۱ \text{ مس} \frac{۱}{۴} \text{ سے } ۵۳۸۶۰۱$$

$$۱۳۸۵۱ = ل اور ز = ۲۵۶۴۱ کے سوا باقی سب کو خارج$$

کرتی ہے -

۵ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ع = ل + ۲ ز جب (ل - ح) + ۵ ز جب ۲ (ل - ح)$$

$$- مس ۱۰ اسے ۱۰ جب ۲ ل + ۲ ز جب (ل - ح) جم ۲ ل ۱۰ + ۱۰ مس ۱۰ اسے جب ۲ ل$$

اسے لکھ سکتے ہیں

$$ع = ل + ۲ ز جب (ل - ح) - مس ۱۰ اسے جب ۲ ل + ۲ ز مس ۱۰ اسے جب (ل - ح)$$

$$+ ۵ ز جب ۲ (ل - ح) - ۲ ز مس ۱۰ اسے جب (ل - ح) + ۱۰ مس ۱۰ اسے جب ۲ ل$$

چونکہ مقداریں ز، ز مس ۱۰ اسے اور مس ۱۰ اسے بہت چھوٹی ہیں  
اس لیے جملہ (ع - ل) کی پہلی دو نہیں بہت ہی اہم ہیں اور دوسری ارقام  
زیر بحث مقصد کے لیے نظر انداز کی جاسکتی ہیں، اس لیے

$$ع = ل + ۵$$

جہاں  $۵ = ۲ ز جب (ل - ح) - مس ۱۰ اسے جب ۲ ل$   
مقدار ۵ کو وقت کی مساوات کہتے ہیں۔ یہ مقدار سورج کے اوسط  
طول بلد میں جمع کرنی پڑتی ہے تاکہ اس کا صعود مستقیم حاصل ہو۔

۵ کو یہاں نیم قطری زاویوں میں بیان کیا گیا ہے۔ ہم اس کو وقت  
میں ۱۲ نیم قطری زاوے فی ۲ گھنٹہ کی شرح سے تحويل کرتے ہیں  
اور اس لیے گھنٹوں میں وقت کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$۱۲ \{ ۲ ز جب (ل - ح) - مس ۱۰ اسے جب ۲ ل \} \times ۱۵$$

یا وقت کے ثانیوں میں

$$۱۳۴۵۱ \{ ۲ ز جب (ل - ح) - مس ۱۰ اسے جب ۲ ل \}$$

اگر اس میں ز = ۰.۰۱۶۷۵، ح = ۲۸.۱۰۲ لکھا جائے تو تقریبی نتیجہ

$$ع = ل + ۹۰ جب ل + ۵۲ جم ل - ۵۹۲ جب ۲ ل$$

حاصل ہوتا ہے جو اس بیان کے مائل ہے کہ وقت کی مساوات

$$90^\circ = 90^\circ \text{ جب } 52^\circ \text{ شمال} - 52^\circ \text{ شمال} \text{ جب } 2^\circ \text{ شمال} \dots (1)$$

ہے جبکہ جھوٹی رقبہیں ترک کی جائیں۔

کسی کو کبھی وقت تہ پر اصلی سورج کا ساعتی زاویہ تہ - عہ ہے یا  
ظاہری شمسی وقت = تہ - عہ

اسی آن اوسط سورج کا ساعتی زاویہ تہ - لی کے مساوی ہے یا

$$\text{اوسط شمسی وقت} = \text{تہ} - \text{لی} = (\text{تہ} - \text{عہ}) + (\text{عہ} - \text{لی})$$

پس وقت کی مساوات وہ نصیح ہے جو اوسط شمسی وقت معلوم

(۲۳۲)

کرنے کے لیے ظاہری شمسی وقت میں جبریہ طور پر جمع کرنی پڑتی ہے۔

مثال ۱ - بتاریخ ۲۷ دسمبر ۱۹۱۷ء اوسط ظہر پر وقت کی مساوات تقریباً  
معلوم کرو یہ دیا گیا ہے کہ سورج کا اوسط طول بلد اس وقت ۲۷° ہے۔

(۱) میں ابدال سے  $90^\circ + 53^\circ$  حاصل ہوتا ہے۔ وہ سب رقبہیں جواب

نظر انداز کی گئی ہیں محسوب کی جائیں تو  $53^\circ 81^\circ$  حاصل ہوگا جیسا کہ ایفیرس میں

دیا گیا ہے۔ پس اصلی سورج کا صعود مستقیم عہ، لی سے  $53^\circ$  بڑا ہے جو اوسط

سورج کا صعود مستقیم ہے۔ ظاہری ظہر پر نصف النہار سے اوسط سورج کو گذرے

$53^\circ$  ہو چکے ہیں، اس لیے اوسط وقت حاصل کرنے کے لیے ظاہری وقت میں

$53^\circ$  جمع کرنے پائیں۔

مثال ۲ - ثابت کرو کہ وقت کی مساوات اعتدال ربیع پر تقریباً

$$\frac{1}{4}^\circ \text{ ہے اور اعتدال خریف پر تقریباً } -\frac{1}{4}^\circ \text{۔}$$

مثال ۳ - بتاریخ یکم نومبر ۱۹۱۷ء ظاہری ظہر پر سورج کا اصلی صعود

کرو یہ دیا گیا ہے کہ اس دن اوسط ظہر پر وقت کی مساوات  $18^\circ 12'$

بتاریخ ۱۲ جون اوسط ظہر کا کوئی وقت گھ ۱۲° ۳۳' ہے۔ (ایک شمسی

سال کو نیچے ۳۶۵ ایام کا لیا جائے)۔

(Oxford Second Public Exam. 1902.)

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ انقلاب گرما پر وقت کی مساوات میں تقریباً  
۵۳۔۵ ثانیہ فی گھنٹہ کا اضافہ ہوتا ہے، یہ مان لیا گیا ہے کہ اوسط سورج کی پوری  
حرکت قوس میں ۵۹ ۳۳ ۸ ہے۔

(۱) سے وقت کی مساوات ملتی ہے ۹۰ جب ل = ۵۲۰۴۵۲ جم ل = ۵۹۲۰۴۵۲ جب ل = ۲۔ اگر

ل میں مفل کی ایک چھوٹی تبدیلی ہو تو اس میں

(۹۰ جم ل = ۵۲۰۴۵۲ جب ل = ۱۱۸۴ جم ل = ۲) مفل

کا اضافہ ہوتا ہے۔ ایک گھنٹہ میں مفل = ۵۸۵۰۴۸۵ یا نیم قطرہوں میں  
۵۸۵۰۴۸۵۔ اس لیے وقت کی مساوات میں فی گھنٹہ تبدیلی ہے

مفل = ۵۸۵۰۴۸۵ جم ل = ۳۲۲۰۴۸۵ جب ل = ۵۸۴۹ جم ل = ۲

مخصوص صورت میں فرض کرو کہ ل = ۹۰ تو مفل = ۵۸۵۰۴۸۵  
مثال ۵۔ ثابت کرو کہ وقت کی مساوات کی بڑی سے بڑی قیمت  
جو خروج المرکز سے پیدا ہوتی ہے ۲۴ ز ۱۱ گھنٹے ہے۔

۵۔ وقت کی مساوات سے متعلق ضابطے۔

ان مختلف ضابطوں کو جو وقت کی مساوات سے متعلق ہیں اکٹھا  
کرنا سہولت بخش ہے۔ فرض کرو کہ مشاہد طول بلد ل (گریج کے مغرب)  
میں ہے اور کسی خاص آن پر وہ ظاہری شمسی وقت کا مشاہدہ کرتا ہے جب  
ذیل ترقیم استعمال کی جائے گی:-

ع، سورج کا صعود مستقیم مشاہدہ کی آن پر،  
ظ، ظاہری وقت

ت ' مقامی اوسط وقت ' مشاہدہ کی آن پر '   
 تہ ' مقامی کوکبی وقت ' ' ' ' '   
 و ' وقت کی مساوات   
 و ' وقت کی مساوات سابق گ۔ (۱۔ ظ) گریونچ اوسط ظہر پر '   
 و ' آئندہ ' ' ' '   
 م ' گریونچ کوکبی وقت ہے سابق ' ' ' '   
 م ' آئندہ ' ' ' '   
 و کی تعریف (دیکھو صفحہ ۳۰۶) سے

ت = ظ + و ..... (۱)   
 مشاہدے کی آن پر گ۔ (۱۔ و) گریونچ اوسط وقت   
 ظ + و + ل ہے اور یہ فرض کرنے سے کہ و یکساں طور پر بدلتا ہے ہمیں   
 حاصل ہوتا ہے

و = و + (ظ + و + ل) (و - و) ۲۴ گ ..... (۲)   
 نیز تہ = ظ ..... (۳)   
 جب گریونچ اوسط وقت ت + ل ہو تو گریونچ کوکبی وقت ت + ل ہے   
 اس لیے گزشتہ گریونچ اوسط ظہر سے کوکبی وقفہ تہ + ل م ہے اور یہ کوکبی   
 وقفہ اوسط وقت میں جزو ضربی ۲۴ گ (۴ گ + م - م) کے ذریعہ تبدیل ہوتا ہے

اس لیے مساوات ملتی ہے

$$ت + ل = ۲۴ گ (تہ + ل - م) \setminus (۴ گ + م - م)$$

سے ہم حاصل کرتے ہیں

تہ = تہ - م - (م - م) (تہ - م + ل) ۲۴ گ + م - م ..... (۴)   
 مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے جن میں چہ مقداریں عہ ظ   
 تہ، و، ل آتی ہیں ہم کوئی چار معلوم کر سکتے ہیں جبکہ دو دوسری دی گئی



مثال ۵۔ نیویارک (طول بلد ۷۳° ۵۸' ۶۴" غ) پر بتاریخ  
یکم اکتوبر وقت ظاہری ظہر کو کبھی وقت معلوم کرو، یہ دیا گیا ہے کہ گرینوچ اوسط ظہر  
پر بتاریخ یکم و دوم اکتوبر وقت کی مساوات کی عددی قیمتیں علی الترتیب ۱۰  
۲۸ ۳۳ اور ۳۱ ۲۸ ۴۲ ہیں اور ان دنوں میں گرینوچ اوسط ظہر پر کبھی اوقات  
علی الترتیب ۱۲ ۴۰ ۵۶ ۶۲ اور ۱۲ ۴۳ ۵۴ ہیں۔

[Math. Trip.]

مثال ۶ - بتاریخ ۱۵ اور ۱۶ اپریل ۱۹۵۵ء کو گریونج اوسط ظہر پر وقت کی مساوات ۱۵، ۱۶ اور ۱۷ بجے جن کو علی الترتیب اوسط وقت میں سے تفریق اور اس میں جمع کرنا ہے۔ سورج کا ظاہری ساعتی زاویہ ایک مقام پر جو گریونج سے ۴۰° مشرق میں ہے بتاریخ ۱۶ اپریل مقامی اوسط وقت ۱۵:۵۸ پر معلوم کرو۔

[Coll. Exam.]

[Coll. Exam.]

۶۔ وقت کی مساوات کی ترسیمی تعبیر۔

دفعہ ۴، سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر وقت کی مساوات و کو  
اوسط شمسی وقت کے گھنٹوں میں بیان کیا جائے تو وہ کافی تقرب تک

و ۲ = { ۲ زجب (ل - ح) - میس } + سجب ۲ ل { ۲

ماہل ہوتی ہے۔ اس جملہ میں حسب ذیل تقریبی اندراجات

مس ۱/۲ = ۲۳ و ۲۱/۲ = ۵۹ و ۱/۲ = ۳۶ - ۲۹

کرنے سے تحویل کے بعد (یا راست فضا بلکہ (۱) سے صفحہ ۳۶) حاصل ہوتا ہے

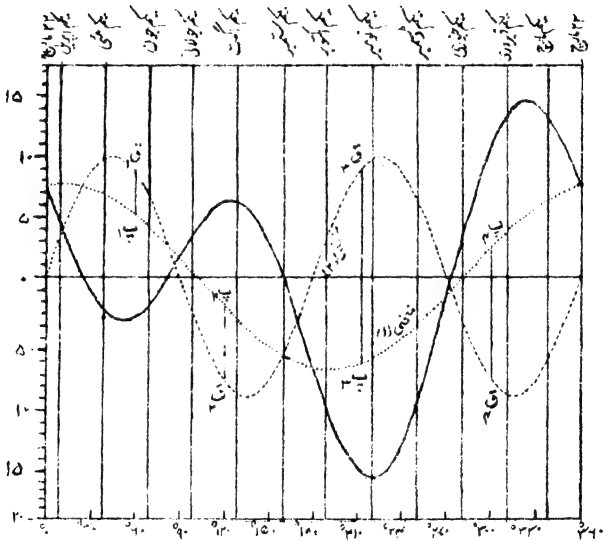
و ۱۲۸ گ جب (ل + ۲۹) - ۱۶۵ گ جب ۲ ل

$$E_{1,2} = \text{جب } (1+2) = 90 \text{ جب } 2$$

اب ہم وہ دو منحنی مرتسم کرتے ہیں (شکل ۶۶) جن کی مساواتیں

$6 = 78 + 24$  جب  $(1 + 24)$  ..... (1)

اور  $90^\circ$  جب  $2^\circ$  ..... (۲)  
ہیں۔ شکل میں  $2^\circ$  کو فصلہ کے طور پر لیا گیا ہے اور معین مثبت یا منفی لیے گئے  
ہیں جیسا کہ بائیں جانب کے اس کھڑے خط سے ظاہر ہے جس پر چاند درج  
ہے۔ صفر سے لیکر  $90^\circ$  تک ہر طول بلد کے لیے یہ منحنی منقسم کیے جاتے ہیں  
(۲۳۷) اور اس لیے یہ ایک سال کے اعتدال ربیع سے دوسرے سال کے اعتدال  
ربیع تک کا رآمد ہیں۔ شکل بغیر کسی قابل قدر تغیر و تبدل کے ساہلہ  
سال تک استعمال کی جاسکتی ہے۔



شکل (۶۶)

منحنیوں کا استعمال اس واقعہ پر مبنی ہوتا ہے کہ وقت کی مساوات  
= منحنی (۱) کا معین - منحنی (۲) کا معین



معمولی قرار داد کی بموجب یہاں یہ سمجھ لیا گیا ہے کہ افقی محور کے اوپر معین شہیت ہیں اور اس کے نیچے منفی -

مثلاً ۲۲ مئی کو وقت کی مساوات ق م پ ہے اور منفی ہے -  
۲۲ جولائی کو وقت کی مساوات ق م پ ہے اور مثبت ہے - ۲۲  
اکتوبر کو وہ ق م پ ہے اور منفی، ۲۲ جنوری کو ق م پ ہے اور  
مثبت -

اس طریقہ پر پینچنیوں (۱) اور (۲) کے معینوں کا فرق اس کی مناسب  
علامت کے ساتھ لیکر ایسے معین قرار دیں تو شکل ۶۶ کا وہ مسلسل منفی حال  
ہوتا ہے جس کے معین وقت کی مساوات کو سال کے ہر دن کے لیے  
تعبیر کرتے ہیں -

شکل (۶۶) میں چار مقامات ایسے ہیں جن پر پینچی (۱) اور (۲) متقاطع  
ہوتے ہیں اور اس لیے ان مقامات پر وقت کی مساوات صفر ہے - پس  
یہ معلوم ہوا کہ وقت کی مساوات سال میں چار دفعہ معدوم ہوتی ہے اور  
مسلسل منفی افقی محور کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے جن سے متناظر تاریخیں معلوم  
ہوتی ہیں -

یہ امر کہ وقت کی مساوات سال میں کم از کم چار دفعہ معدوم ہونی  
چاہئے دوسرے طریقہ سے بھی ثابت کیا جاسکتا ہے - ہم فرض کریں گے  
کہ ت وقت کی مساوات کا وہ حصہ ہے جو طریق الشمس کے میلان کی  
وجہ سے ہے اور ت وہ حصہ ہے جو خروج المکرر کی وجہ سے ہے - فرض  
کرو کہ بلا لحاظ علامت ت کی بڑی سے بڑی قیمت ک ہے تب ک ت  
کی کسی قیمت سے بڑا ہے - ہم دیکھ چکے ہیں کہ ک کی قیمت ۹۰ء ۹۱ ہے اور  
ت ۶۸ء سے بڑا نہیں ہو سکتا -

ا ر بیج سے انقلاب گرما تک ت منفی ہونا چاہئے کیونکہ  
بلان کی وجہ سے نامساویت پیدا ہوتی ہے اوسط سورج کا  
ا سورج کے صعود مستقیم سے بڑا ہوتا ہے - اس لیے

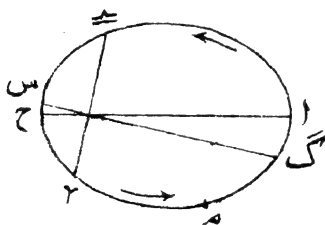
(۲۳۸)

اوسط سورج نصف النہار کو اصلی سورج کے بعد عبور کرتا ہے اور اس لیے اوسط وقت معلوم کرنے کے لیے ظاہری وقت میں عمل تفریق کرنا ہوتا ہے۔ اسی طرح کے استدلال سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ انقلاب گرما سے اعتدال خریف تک ت مثبت ہے، اعتدال خریف سے انقلاب سرما تک ت منفی ہے، اور انقلاب سرما سے اعتدال ربيع تک ت مثبت ہے۔ دونوں اعتدال اور دونوں انقلابوں پر ت صفر ہے۔ وقت کی مساوات کے اُس حصہ کے متعلق جو خروج المکرر کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ بعید ارضی (Apogee) اور قریب ارضی (Perigee) دونوں پر ت صفر ہے اور چونکہ قریب ارضی سے بعید ارضی تک اصلی سورج اپنے اوسط مقام سے آگے رہتا ہے اس لیے ت کی قیمت مسلسل مثبت ہونی چاہیے۔ اسی طرح بعید ارضی سے قریب ارضی تک تمام راستہ پر ت منفی ہونا چاہیے۔ فرض کرو کہ قریب ارضی اور بعید ارضی علی الترتیب ح' (شکل ۶۷) ہیں، انقلاب گرما اور سرما پر سورج کے محل گ' اس میں اور اعتدالی نقطے

۲۔ = ہیں۔  
فرض کرو کہ ہر وہ نقطہ ہے جہاں سورج اُس اُن رہتا ہے جبکہ ت (جو ۲ پر اور گ پر صفر ہے) اپنی بڑی سے بڑی منفی قیمت رکھتا ہے۔ اب چونکہ وقت کی مساوات و' ت + ت ہے ہم دیکھتے ہیں کہ ح' سے ۲ تک و کی قیمت مسلسل مثبت ہونی چاہیے کیونکہ ت اور ت دونوں مثبت ہیں۔

نقطہ ہر پر و = ت۔ ت اور چونکہ ت کبھی بھی ک کے مساوی نہیں ہو سکتا اس لیے ہر پر و کو منفی ہونا چاہیے۔ اب چونکہ و' ۲ پر مثبت ہے، ہر پر منفی اور پھر گ پر مثبت اس لیے ۲ اور ہ کے درمیان کوئی ایک نقطہ اور ہ اور گ کے درمیان ایک دوسرا نقطہ ہونا چاہیے جہاں و = ۰۔ پس وقت کی مساوات، اعتدال ربيع اور انقلاب گرما کے درمیان کم از کم دو مرتبہ صفر ہونی چاہیے۔

گ سے تک ت اور ت دونوں مثبت ہیں اور اس لیے انقلاب  
گرا سے بعید ارضی تک و مسلسل مثبت ہوتا ہے۔ لیکن اس سے  
تک ت منفی ہے اور چونکہ سے پہلے ت صفر ہے اور ت اب بھی منفی  
ہے اس لیے و سے پہلے ت اور ت پر مثبت ہونا چاہئے۔ پس نتیجہ  
نکلتا ہے کہ و اور سے کے درمیان کسی ایک نقطہ پر صفر ہونا چاہئے  
اور اس طرح وقت کی مساوات کم از کم پھر ایک مرتبہ بعید ارضی اور اعتدال  
خریف کے درمیان صفر ہونی چاہئے۔



شکل (۶۷)

س سے تک ت اور ت مسلسل منفی ہیں اور اس لیے  
وقت کی مساوات مدار کے ان نقطوں پر معدوم نہیں ہو سکتی۔ ج پر و  
پھر مثبت ہو جاتا ہے اور اس لیے وہ 'س اور ح کے درمیان کم از کم  
ایک مرتبہ صفر ہونا چاہئے۔

پس معلوم ہوا کہ وقت کی مساوات اعتدال ربیع اور انقلاب  
۱ کے درمیان کم از کم دو مرتبہ صفر ہونی چاہئے، بعید ارضی اور اعتدال خریف  
ان کم از کم ایک مرتبہ اور انقلاب گرا اور قریب ارضی کے درمیان  
بمقام

مثال ۱۔ اگر ہم لاکھ سورج کے اوسط طول بلد کا ماس بھیجیں تو

بتاؤ کہ وہ دن جن میں وقت کی مساوات صفر ہوتی ہے یعنی  $\lambda = (1 + \lambda^2) - \frac{1}{2}$  اور ایک خط مستقیم کے تقاطع تقاطع سے تقریبی طور پر معلوم کیے جاسکتے ہیں، اور اگر اس خط کی مساوات

$$\lambda = 0.4 + 0.38 \lambda$$

ہو تو زیر بحث ایام کی تخمینہ تقریبی طور پر پیکرو۔

مساوات مس  $\lambda = 2$  جب  $\lambda = 2$  ز جب  $\lambda = 2$  (ج) میں  
مس  $\lambda = 2$  لا رکھو تو لا میں فصل مساوات سر کیا ان دو مساواتوں  
 $\lambda = 2$  لا جم  $\lambda = 2$  سے  $\lambda = 2$  ز جب  $\lambda = 2$  سے

$$\lambda = (1 + \lambda^2) - \frac{1}{2}$$

سے ماکوسا ذکر کرنے کا نتیجہ ہے۔

مثال ۲۔ بنایا جا چکا ہے کہ وقت کی مساوات ثانیوں میں

$$90 \text{ جب } \lambda + 252 \text{ جم } \lambda - 592 \text{ جب } \lambda$$

ہے جہاں  $\lambda$ ، سورج کا اوسط طول بلد ہے۔ اس جملہ سے ثابت کرو کہ وقت (۲۴۰)

کی مساوات سال میں کم از کم چار دفعہ معدوم ہوتی ہے۔  
اگر ہم اس جملہ میں  $\lambda$  کی بجائے  $90$ ،  $180$ ،  $270$  کیے بعد دیگرے رکھیں تو اسکی  
علامت مثبت سے منفی میں تبدیل ہوتی ہے اس لیے  $90$  اور  $270$  کے درمیان  
 $\lambda$  کی ایک سرسری قیمت ہوتی چاہئے جو مساوات

$$90 \text{ جب } \lambda + 252 \text{ جم } \lambda - 592 \text{ جب } \lambda = 0$$

کی ایک اصل ہو۔

نیز  $90$  اور  $270$  کے درمیان  $90$  اور  $180$  کے درمیان  $180$  اور  $270$  کے درمیان  
کی قیمتوں کے لیے علامت کی فرید تبدیلیاں ہیں۔ اس لیے  
مساوات بالا کی چار حقیقی اعلیٰ ہونی چاہئیں اور جب چند دیگر چھوٹی قیمتیں  
بھی ملحوظ رکھی جائیں تو یہ معلوم ہوتا ہے کہ یہ اعلیٰ تقریباً

$$22^\circ 2', 159^\circ 8', 22^\circ 2'$$



$$+ \text{جب ل جب ل} + \text{جب ل جب ل جب ل} = ۰$$

مثال ۴۔ اگر زمین کے مدار کا خروج المکرز  $\frac{1}{4}$  ہو، طریق الشمس کے

میلان کی جیب التمام  $\frac{11}{12}$ ، اور اعتدالین کے خط کو محور اعظم پر عمود لیا جائے تو ثابت کرو کہ جب وقت کی مساوات، خروج المکرز، اور میلان دونوں کی وجہ سے عدد اعظم ہوتی ہے تو سورج کے طول بلد وہ زاوے ہیں جن کی جیب تقویہ ۵۶۷۔

[Math. Trip. 1.]

اور ۵۸۹۰ ہیں۔

وقت کی مساوات ہے

$$۲ \text{ جب ل} (ل - ح) - \text{مس} ۲ \frac{1}{4} \text{ سے جب ل}$$

یہ  $۹۰ = ح$  کے لیے اعظم ہوتی ہے جبکہ

$$۲ \text{ جب ل} - \text{مس} ۲ \frac{1}{4} \text{ سے جم} ۲ = ۰$$

دئے ہوئے مستقل درج کرنے سے یہ مساوات  $\frac{1}{4}$  جب ل -  $\frac{1}{4}$  جم  $\frac{1}{4}$  = ۰ ہوتی ہے اس لیے جب ل میں ایک دو درجی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کی اصلیں دئے ہوئے اعداد ہیں۔

۷۔ وقت کی مقیم مساوات کی عام تحقیق - (۲۴۱)

اب ہم طریق الشمس کے میلان یا زمین کے مدار کے خروج المکرز کی بابت کوئی مفروضہ قائم کیے بغیر معلوم کریں گے کہ وقت کی مساوات کب اعظم یا اقل ہوتی ہے۔ لیکن ہم یہ فرض کریں گے کہ سورج کے گرد زمین کی حرکت ایک ثابت قطع ناقص میں واقع ہوتی ہے اور خط استواء کی حرکت نظر انداز کی گئی ہے۔ دفعہ ۵۲ سے ضروری مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اور وہ حسب ذیل ہیں:

$$\text{مس} ۱ = ۱ - ۲ \text{ جب ل} (جم - ز) - ۶ = ۶ - ۲ \text{ جب ل} ۷$$

$$\text{مس} ۵ = جم - ۵ \text{ مس} ۵ = ۵ + ح$$

جہاں اصلی، اوسط اور خروج المرکز ہی بے قاعد گئیاں و ط، و ہیں اور سورج کا اصلی طول بلد ۵ ہے مدار کا خروج المرکز ۱ اور ضیض کا طول بلد ۵۔ وقت ت کے لحاظ سے ان مساواتوں کو تفریق کرنے سے

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} \times \frac{۱۲ - ۲ز}{۱ - زجم} = \frac{\text{فرء}}{\text{فرت}}$$

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} \quad (۱ - زجم ع) \quad (۱ - زجم ع)$$

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{\text{فرء}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} \quad (جم ۵ + جم ۵ جب ۵) \quad (جم ۵ + جم ۵ جب ۵)$$

وقت کی مساوات سورج کے اوسط طول بلد (ط + ح) کو اس کے صعود و مستقیم ع میں سے تفریق کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور جب وقت کی مساوات مقیم ہوتی ہے تو ت کے لحاظ سے اس کا تفریق سر صفر ہوتا ہے اس لیے

$$\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرت}}$$

یا تفریق سرور کے اسقاط سے

$$(۱ - زجم ع) (جم ۵ + جم ۵ جب ۵) = (۱ - زجم ع) (جم ۵ + جم ۵ جب ۵)$$

قطع ناقص کی ہندسی خاصیتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$(۱ - ز) = (۱ - زجم ع) \{ ۱ + زجم (۵ - ح) \}$$

اس لیے

$$(۱ - ز) (جم ۵ + جم ۵ جب ۵) = (جم ۵ + جم ۵ جب ۵) \{ ۱ + زجم (۵ - ح) \}$$

میں ز کی مقدار پر کوئی قید نہیں ہے اور یہ ۵ کی تعیین کے مساوات ہے جبکہ وقت کی مساوات مقیم ہو۔

۱۔ ثابت کرو کہ وقت کی مساوات کی مقیم تئیں اس وقت

واقع ہوتی ہیں جبکہ سورج کے سمتی قطر کا ظل خط استواء کے مستوی پر، اوسط فاصلہ  
 لکا (۱-ز)  $\frac{1}{2}$  (جم سے)  $\frac{1}{2}$  گنا ہو جہاں ز مدار کا خروج المرکز اور سے طریق الشمس کا

میلان ہے۔  
 فرض کرو کہ یہ ظل غہ ہے، تب اگر سورج کا میل ضہ ہو تو  
 غہ =  $\frac{1}{2}(1-ز)$  (جم ضہ)  $\{1 + (جم \odot - ح)$   
 لیکن جم ضہ =  $(جم^2 \odot + جم^2$  سے جب  $\frac{1}{2} \odot$

اور اوپر جو ثابت ہو چکا ہے اُس سے

$$\frac{(جم^2 \odot + جم^2$$
 سے جب  $\frac{1}{2} \odot}{(جم سے) \frac{1}{2}} = \frac{1 + (جم \odot - ح)}{\frac{1}{2}(1-ز)}$ 

اس سے غہ =  $\frac{1}{2}(1-ز)$  (جم سے)  $\frac{1}{2}$

مثال ۲۔ فرض کر دو کہ زمین کے لحاظ سے سورج کا طریق ٹیپک ایک  
 قطع ناقص ہے جس کے ایک ماسکہ پر زمین ہے۔ فرض کرو کہ اس قطع ناقص کا ظل  
 خط استواء کے مستوی پر لیکر ایک دوسرا قطع ناقص حاصل کیا گیا ہے۔ تب سورج کے  
 محل کے ظل جبکہ وقت کی مساوات بڑی سے بڑی ہو اس دوسرے قطع ناقص  
 اور ایک دائرہ کے نقاط تقاطع ہیں جس کا مرکز زمین ہے اور جس کا رقبہ اس  
 قطع ناقص کے رقبہ کے مساوی ہے۔

مثال ۳۔ عام صورت میں ثابت کرو کہ خروج المرکز خواہ کچھ ہی ہو  
 مرکز کی مساوات اعظم ہوتی ہے جبکہ سمتی قطر، محور اعظم اور محور اصغر کے درمیان  
 اوسط ہندسی ہو۔

## ۷۸۔ موسموں کا سبب -

مساوات میں سورج کا ظاہری سالانہ راستہ اعتدالی اور انقلابی نقطوں



چار ربعوں میں تقسیم ہے۔ ان کے جواب میں وقت کے جو چار وقفے ہیں ان کو موسم بہار، گرما، خریف اور سرما کہتے ہیں۔ بہار شروع ہوتا ہے جبکہ سورج راس الحمل میں داخل ہوتا ہے یعنی جبکہ اس کا طول بلد صفر ہے۔ جب سورج انقلابی نقطہ (طول بلد =  $90^\circ$ ) پر پہنچتا ہے تو گرما کا آغاز ہوتا ہے۔ موسم خریف شروع ہوتا ہے جبکہ سورج راس المیزان (طول بلد =  $180^\circ$ ) میں داخل ہوتا ہے۔ سرما کا آغاز اس وقت ہوتا ہے جبکہ سورج کا طول بلد  $270^\circ$  ہوتا ہے اور اس کا اختتام اس وقت جبکہ سورج پھر راس حمل میں داخل ہوتا ہے۔

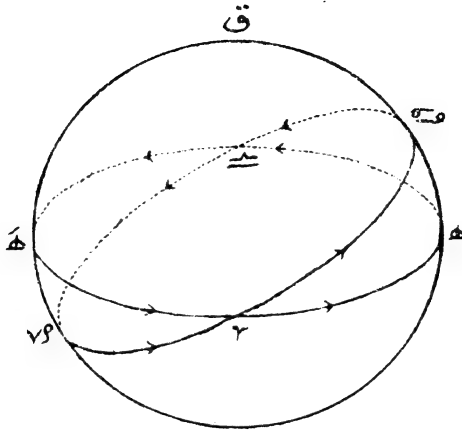
زمین کے گرد ہوائی کے جوتائی حالات میں تبدیلیاں جو اس نظر کا سبب ہیں جس کو موسموں کا تغیر کہتے ہیں خاص کر ان تبدیلیوں سے متعین کی جاتی ہیں جو سورج سے پہنچنے والی حرارت کی مقدار میں واقع ہوتی ہیں جیسے جیسے سال آگے بڑھتا ہے۔

حرارت کی مقدار جو سورج سے زمین کی سطح پر کے کسی مقام پر پہنچتی ہے دو چیزوں پر منحصر ہوتی ہے (۱) گھنٹوں کی اس تعداد پر جن میں سورج افق کے اوپر رہتا ہے اور (۲) بوقت ظہر سورج کے راسی فاصلہ ایک ایسے مقام پر جو عرض بلد نہ میں واقع ہے طلوع آفتاب سے غروب آفتاب تک وقفہ  $24 \times 22$  ہے جہاں یہ نیم قطبی زاویوں میں وہ زاویہ ہے جو مساوی  $22^\circ$  ہے۔

(۲۲۲)

سے حاصل ہوتا ہے، سورج کا راسی فاصلہ بوقت ظہر نہ  $22^\circ$  ہے اور نہ اس کا میل ہے۔

جب سورج طریقی الشمس پر راس الحمل کے نقطہ سے حرکت کرتا ہے میل مثبت ہوتا ہے (دیکھو شکل ۶۸) اور جب سورج سرطان کے راس کی علامت  $90^\circ$  پہنچتا ہے تو یہ میل انقلاب گرا پر اعظم بن کر رہتا ہے، اس وقت اس کا میل طریقی الشمس کے میلان کے مساوی ہوتا ہے یعنی  $23^\circ 27'$ ۔ اس نقطہ سے شمسی میل گھٹنے لگتا ہے تا آنکہ



شکل (۶۸)

اعتدال خریف = پر صفر ہو جاتا ہے۔ اعتدال خریف سے میل منفی ہو جاتا ہے اور گھٹتے گھٹتے جدی میں جس کی علامت ۷۶ ہے انقلاب سرما پر اتل (۲۷۳) ہوتا ہے اور اس کے بعد پھر ایک مرتبہ بڑھنے لگتا ہے اور اگلے اعتدال پر پھر معدوم ہوتا ہے۔

موسمی تبدیلیوں پر غور کرنے کے لیے زمین کی سطح کو پانچ منطقات میں تقسیم کرنا سہولت بخش ہے۔ یہ منطقات خط استواء کے متوازی دائروں سے محدود ہوتے ہیں جو عرض بلد  $۲۳^{\circ} ۲۷'$  اور  $۶۶^{\circ} ۳۳'$  میں واقع ہیں۔ وہ منطقہ جو خط استواء کے شمال اور جنوب میں  $۲۳^{\circ} ۲۷'$  کے توازیوں کے درمیان ہے منطقہ حارہ کہلاتا ہے اور اس کو محدود کرنے والے شمالی اور جنوبی دائرے خط سرطان اور خط جدی کہلاتے ہیں۔ شمال اور جنوب میں عرض بلد  $۶۶^{\circ} ۳۳'$  کے توازی دائرہ قطب شمالی اور دائرہ قطب جنوبی کہلاتے ہیں۔ وہ منطقہ جو دائرہ قطب شمالی اور خط سرطان

درمیان ہے منطقہ معتدلہ شمالی کہلاتا ہے اور وہ جو دائرہ قطب جنوبی اور خطہ جدی کے درمیان ہے منطقہ معتدلہ جنوبی کہلاتا ہے۔ بالآخر وہ علاقے جو قطب شمالی اور قطب جنوبی کے گرد دائرہ قطب شمالی اور دائرہ قطب جنوبی سے محدود ہیں منطقہ منجمد شمالی اور منطقہ منجمد جنوبی کہلاتے ہیں۔

انقلاب گرما کے وقت  $۲۳^{\circ}$  اور اس لیے دائرہ قطب شمالی کے کسی نقطہ کے لیے مس ف مس  $۹۰^{\circ}$ ۔ ان حالات کے تحت سورج کا ساعتی زاویہ طلوع اور غروب پر  $۹۰^{\circ}$  ہے یعنی سورج کا یومی راستہ اس وقت خط استوا کے متوازی ایک دائرہ ہے جو افق کو نقطہ شمالی پر مس کرتا ہے اس لیے نیم شب پر اس کی قرص کا نصف حصہ نظر آئے گا (نیم یہاں انعطاف کے اثر کو ملحوظ نہیں رکھ رہے ہیں) مشاہدہ جیسے جیسے قطب کی طرف بڑھیں گے منطقہ منجمد کے اندر سورج بغیر غروب ہوئے متعدد ایام تک افق کے اوپر رہے گا۔ خود قطب پر مشاہدہ کو سورج بوقت اعتدال افق کے گرد حرکت کرتا نظر آئے گا اور اعتدال کے بعد وہ آسمان کے گرد گردش کرے گا اور افق کے اوپر اس کا ارتقاع بتدریج بڑھتا جائے گا تا آنکہ بوقت انقلاب اس کا یومی راستہ  $۲۳^{\circ}$  کے ارتقاع پر افق کے متوازی تقریباً ایک دائرہ ہوگا۔ انقلاب کے بعد وہ افق کی جانب ایک مشابہ لولب منحنی میں واپس ہوگا اور افق پر اعتدال خریف کے وقت پہنچے گا۔ موسم سرما میں نصف سال تک سورج مسلسل افق کے نیچے رہے گا۔

منطقہ معتدلہ جنوبی اور منطقہ منجمد جنوبی میں منظر ہر متناظر شمالی منظر کے مشابہ ہوں گے لیکن ان کا وقوع سال کے میں ہوگا۔ مثلاً جنوبی نیم کرہ ارض کا موسم بہار وقت کے شمالی نیم کرہ کے موسم خریف کے ہم زمان ہوگا اسی طرح جنوب کا سرما شمال کے گرما اور شمال کا سرما جنوب کے گرما کے ہم زمان ہوگا۔

منطقہ مارہ میں حالات حسب ذیل ہوتے ہیں :- خط استوا پر چونکہ  $\phi = 0$  اس لیے (۱) سے  $\sin \phi = 0$  خواہ ضہ کی قیمت کچھ ہی ہو۔ اس لیے  $\sin \phi = 0$  یعنی دن کا طول پورے سال ۱۲ گھنٹہ رہتا ہے۔ لیکن سورج کا نصف النہاری راسی فاصلہ دن بہ دن متغیر ہوگا۔ اعتدال ربیع پر سورج کا نصف النہاری راسی فاصلہ تقریباً صفر کے مساوی ہوگا (یہ ٹھیک صفر کے مساوی ہوگا اگر سورج اُس مقام کے نصف النہار کو اُس وقت عبور کرے جبکہ وہ راس الحمل کے نقطہ میں سے گذر رہا ہو)۔ جب موسم بہار شروع ہو کر بڑھنے لگتا ہے یہ نصف النہاری راسی فاصلہ انقلاب تک بتدریج بڑھے گا اور انقلاب کے وقت سورج کا ٹکید تقریباً راس کے  $23^{\circ} 27'$  شمال میں واقع ہوگا۔ اعتدال خریف پر سورج پھر لو وقت ظہر تقریباً راس میں سے گذرے گا اور انقلاب سرما پر راس کے  $23^{\circ} 27'$  جنوب میں ٹکید کرے گا۔ اُن مقامات پر جو خط استوا اور خط جدی یا خط سرطان کے درمیان واقع ہیں حرارت کی مقدار جو سورج سے پہنچتی سال میں دو مرتبہ عظم قیمت اختیار کرتی اور اُس وقت سورج کا میل اُس مقام کے عرض بلد کے مساوی ہوگا یہاں ہم نے صرف اُس حد تک غور کیا ہے جس حد تک ظہر پر سورج کے راسی فاصلہ کے اثر کا تعلق ہے۔

اگرچہ وہ چار حصے جن میں طریق الشمس کا بڑا دائرہ اعتدالوں اور انقلابوں سے تقسیم ہوا ہے طول میں مساوی ہیں لیکن ان حصوں کو طے کرنے میں جو وقت صرف ہوتے ہیں وہ مساوی نہیں ہوتے۔  
 سویموں کی مدتیں معلوم کرنے کے لیے دفعہ ۳ کی مساوات (۳) استعمال ہوتی ہے جو سورج کے اوسط طول بلد اور اصلی طول بلد کے درمیان ایک رشتہ ہے یعنی

$$L = 90 - \phi + \frac{3}{4} \sin 2\phi \quad (5 - 5)$$
 ہم اپنے موجودہ مقصد کے لیے اس جگہ کی تیسری رقم کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور صرف یہ لکھ سکتے ہیں

ل = ۵ - ۲ ز جب (۵ - ح)  
 جب سورج ۲ میں ہو تو ۵ = ۰ اور اس آن سورج کے اوسط  
 طول بلد کو ل سے تعبیر کرنے سے  
 ل = ۲ ز جب ح  
 اسی طرح انقلاب گرما، اعتدال خریف، انقلاب سرما اور پھر آئو  
 اعتدال ربیع پر سورج کے اوسط طول بلدوں کو علی الترتیب ل، ل، ل، ل، ل  
 سے تعبیر کریں تو

$$ل = \frac{1}{4} \pi - ۲ ز \text{ جم ح}$$

$$ل = \pi - ۲ ز \text{ جب ح}$$

$$ل = \frac{3}{4} \pi + ۲ ز \text{ جم ح}$$

$$ل = \pi + ۲ ز \text{ جب ح}$$

موسموں کی مدتیں ان پانچ اوسط طول بلدوں میں سے ہر متصلہ  
 زوج کے درمیان جو فرق ہے اس کو جزو ضربی ۲۴، ۶۵، ۳۶۲، ۲۲ سے  
 ضرب دینے سے معلوم ہوتی ہیں۔ اس جزو ضربی کی بجائے گ لکھنے  
 سے شمالی نیم کرہ ارض کے لیے حاصل ہوتا ہے۔

دنوں کی تعداد

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{بہار میں = گ (ل - ل) = ۹۱،۳۱۰ - ۲ ز گ (جب ح + جم ح)} \\ \text{گ (ل - ل) = ۹۱،۳۱۰ - ۲ ز گ (جب ح - جم ح)} \\ \text{گ (ل - ل) = ۹۱،۳۱۰ + ۲ ز گ (جب ح + جم ح)} \\ \text{سرمایں = گ (ل - ل) = ۹۱،۳۱۰ + ۲ ز گ (جب ح - جم ح)} \end{array} \right. \quad (۱)$$

نہ اور حصہ کی وہ قیمتیں رکھنے سے جو دفعہ ۷۳ میں دی گئی ہیں حاصل ہوتا ہے

۲ زنگ جب حصہ = ۱۵۹۱۰ دن

۲ زنگ جم حصہ = ۰.۶۳۷۹۴

اور

اس لیے ان چار موسموں کی مدتیں حسب ذیل ہیں

دن گھنٹے

۲۰۶۲ ۹۲

بہار

۱۳۶۳ ۹۳

گرما

۱۸۶۷ ۸۹

خریف

۰۶۵ ۸۹

سرمہ

پس ہم دیکھتے ہیں کہ موسم گرما اور بہار باہم ۱۸۶ دن ۱۰۶ گھنٹے

رہتے ہیں لیکن موسم خریف اور سرمہ کے باہم صرف ۱۷۸ دن ۱۹۶ گھنٹے

ہوتے ہیں۔ اس کی اتنی صورت جنوبی نیم کرہ میں ہوتی ہے وہاں موسم

گرما اور بہار باہم ۱۷۸ دن ۱۹۶ گھنٹوں کے ہوتے ہیں اور موسم خریف

اور سرمہ باہم ۱۸۶ دن ۱۰۶ گھنٹوں کے۔

مثال ۱۔ یہ مانکر کہ حصہ یکساں طور پر بڑھتا ہے ثابت کرو کہ آئندہ زمانہ میں

چار موسموں کی مدتوں کی حسب ذیل انتہائی حدود ہونگی:-

$$۱۰۳۱۵ \pm ۲۱ \times ۲۳۵۶۳۶ \times ۲۱$$

مثال ۲۔ اگر سال میں دنوں کی تعداد چ ہو اور اگر موسم گرما بہار سے

ق دن بڑا اور خریف سے س دن بڑا ہو تو مارکا خروج المکرز اور قریب ارضی کا

طول بلد معلوم کرو۔

## دسویں باب پر مثالیں

مثال ۱۔ اس مفروض پر کہ زمین کا مدار ایک تقریباً دائری قطع ناقص ہے

اور اوجین اور انفلابین کے خطوط ایک ہی طول بلد رکھتے ہیں ثابت کرو کہ خروج المکرز

تقریباً

$$\frac{9-1}{9+1} \text{ مس } \frac{1}{2}$$

کے مساوی ہے جہاں ۹، ۱، قریب ارضی اور بعد ارضی پر وقت کی مساوات میں  
فی گھنٹہ تغیرات کو تعبیر کرتے ہیں اور سہ طریق الشمس کا میلان [Math. Trip.]

مثال ۲۔ کیمبرج میں ایک گھڑی گرنیج اوسط وقت دکھاتی ہے۔ بتاؤ کہ  
اس میں کیا وقت تھا جبکہ سورج کا اگلا کنارہ بتاریخ ۲۶ جنوری ۱۷۷۵ء نصف النہار پر  
پہنچا تھا اگر یہ دیا جائے کہ

$$۲۲۶۷۵$$

$$۱۰۶۶۲۱$$

$$۲۶۸۸۴$$

کیمبرج کا طول بلد

نصف النہار عبور کرنے میں جو وقت لگا

وقت کی مساوات

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ بحری جہتزی کے دو خانے جن سے سورج کے  
صعود و تقیم کا تغیر فی گھنٹہ اور ”نیم قطر کا وقت جو نصف النہار عبور کرنے میں لگتا ہے“  
معلوم ہوتے ہیں ایک ساتھ بڑھتے اور گھٹتے ہیں اور اول الذکر مقدار عملاتی الذکر کے مربع  
کے متناسب ہوتی ہے۔ [Math. Trip. 1.]

مثال ۴۔ اگر زمین کے مدار کا خروج المرکز زہوا اور اعتدالین کا خط مدار کے  
عمود اعظم پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ زمین ۷ سے ۷ تک اور ۷ سے ۷ تک حرکت  
کرنے میں جو اوقات لیتی ہے ان کا فرق تقریباً ۶۵ م دن ہے۔

مثال ۵۔ ثابت کرو کہ مرکز کی بڑی سے بڑی مساوات ۲ ز + ۱۱ ز + ۸ م ہے  
اور جب یہ صورت ہو تو

$$۲۵ \text{ ز } \frac{۲۵}{۳۸۴} - ۵ \text{ ز } \frac{۵}{۴} - ۱۱ \text{ ز } \frac{۱}{۲} = ۸، ۲۱ \text{ ز } \frac{۲۱}{۱۲۸} + ۳ \text{ ز } \frac{۳}{۴} + ۱۱ \text{ ز } \frac{۱}{۲} = ۹$$

$$۳۴ \text{ ز } \frac{۳۴}{۳۸۴} - ۱ \text{ ز } \frac{۱}{۲} - ۱۱ \text{ ز } \frac{۱}{۲} = ۶$$

حصہ اول ختم

# اشاریہ

## علم ہیئت کروئی

### حصہ اول

نوٹ: اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے۔

اشکاف منظری زاویہ ' ۱۳۸  
آڈیمس، کیلر کے مسئلہ کامل ' ۳۴۰  
کیلر کے مسئلہ کارٹسیسی حل ' ۲۴۹  
لمبرٹ کے مسئلہ کا ثبوت ' ۲۵۵

ارتفاع ' ۱۱۹  
ارض مرکزی عرض بلد ' ۶۰  
ارضی تاریخ خط ' ۳۴۲  
استحوالہ کروئی محدودوں کا ' ۵۵  
اسٹونی ہرسٹ پر مقناطیسی انصراف ' ۱۲۱  
استقبال ' ۲۶۳

کسی وجہ ' ۲۷۲  
کے ضابطے ' ۲۷۳  
عام استقبال ' ۲۷۲



- سیاروی '۲۷۰  
اعتدال خریف '۱۲۸  
اعتدال ربیع '۱۲۷  
اعتدالی نقطہ '۱۲۸  
اعتدالوں کا کبوتر '۲۶۳  
اقتراقی مدت '۲۲۹  
البرشتہ 'عرض بلدوں میں تغیرات '۳۰۲  
السمت '۱۱۹  
آلڈس 'کیلبر کے مسئلہ کو حل کرنے کے لیے جدولیں '۲۵۱  
انعطاف نما کرہ ہوائی کا '۱۷۸  
انقلابی دائرہ '۴۶  
انحاء ارضی نصف النہار پر '۷۱  
انعطاف '۷۷  
مشاہدات سے تعیین '۱۹۳  
تفرقی مساوات کا تکمیل '۱۸۸  
زاویہ محیل پر اثر '۲۱۰  
دباؤ اور تپش کا اثر '۱۹۸  
کی جدول '۱۸۳  
اول السمیت '۱۱۵  
اوج '۲۳۶  
باریجا '۱۹۹  
کیمیاکس '۱۲۱  
لے 'کبوتر کا انکشاف '۱۸۸  
ن '۱۸  
برننو 'انعطاف کے نظریہ پر '۱۸۷

سیاروی استقبال پر، ۱۷۰

بعید ارضی، ۲۳۶

باؤ شنگر، ۲۴۲

بے قاعدگی خروج المرکزی، ۲۳۶

اصلی، ۲۳۶

اوسط، ۲۳۶

بینی اور ان کا فن، ۲۱

بیگے، ۱۹

میسل کا بینی اور ان کا طریقہ، ۳۱

یومی اعداد، ۲۸۹

انعطاف، ۱۸۸

تاریخ خط ارضی، ۳۴۲

تسطیحی ظیل، ۸۸

کے ضابطے، ۹۶

تفرقی ضابطے کروی مثلث کے، ۱۹

سمادی کرہ پر ان کا استعمال، ۱۴۰

تقاطع، دو دائروں کا، ۵۱

سکبہ بالائی وزیرین، ۱۱۵

سیارے کا، ۱۵۰

چاند کا، ۱۵۲

پر طول بلد کا اثر، ۱۵۴

راس الحمل کے، ۳۲۴

ٹاؤن لی، عرض بلد میں تغیر، ۳۰۲

خریا، ۱۰۷

جدی، سورج کا محل انقلاب سرماہ، ۳۷۵

- جغرافیٰ عرض بلد، ۶۷  
 جولین کیلنڈر، ۳۲۴  
 جوزا (بہ) کا استقبال اور کیو، ۲۹۳  
 چاند کا تکبید، ۱۵۲  
 چاند اور شمالی قطب کی حرکت کی وجہ سے عرض بلد میں تغیرات، ۳۰۲  
 حاکم قطبی ستارے، ۱۱۶  
 حرکتیں، ذاتی، ۳۰۰  
 حنیض، ۲۳۶  
 خروج المیزان، زمین کے مدار کا، ۳۵۷  
 خزاں، موسموں کے اسباب، ۳۷۳  
 خط استواء، ۱۱۲  
 دائرہ، درجہ دار بڑا، ۳۸  
 کا شطب، ۳۹  
 کامیلان، ۴۹  
 کے عقدے، ۵۲  
 دائری اجزاء جو نیپیر کے ضابطوں میں قائم الزویہ مثلث کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں،  
 دب اکبر، ۱۰۷  
 دجاہ، ستارے کا اختلاف منظر، ۲۰۹  
 درجہ دار بڑا دائرہ، ۳۸  
 کا شطب، ۳۹  
 کامیلان، ۴۹  
 کے عقدے، ۵۲  
 دما تارے کی ناقصی حرکت، ۲۵۲  
 دلبہرہ مثلثات، ۱۲  
 دیوسس خریج کا قمر، ۲۳۳

- ذاتی حرکتیں ستاروں کی، ۳۰۰  
 راس الحمل، ۱۲۰  
 کی حرکت، ۲۵۸  
 کاموسموں سے تعلق، ۳۱۲  
 راس، ۱۱۱  
 راسی فاصلہ، ۱۱۹  
 راسی فاصلے، میل اور ساعتی زاویہ سے محسوب کردہ، ۱۳۶  
 رامبوکیلر کا مسئلہ، ۲۴۰  
 ڈلمبر کی متشکلات کے لیے قاعدہ، ۱۲  
 ربعی مثلث، ۸  
 رقبے، سیاروی حرکتوں کے متعلق کیلر کا کلیہ، ۲۲۲  
 رفاص فوکوکا، ۱۱۱  
 زاویہ محل، ۲۱۰  
 زاویہ محل دو ہرے تارے کا، تعریف، ۲۱۰  
 زمین کی شکل، ۶۵  
 زمین کا محور، ۶۶  
 کے ابعاد، ۶۶  
 کی گردش، ۱۳۲  
 کی گردش کا دور، ۱۳۳  
 کی استقبالی اور کبوی حرکت، ۶۶، ۲۸۴  
 کے قطب کے محل میں تغیر، ۳۰۲  
 کی سالانہ حرکت، ۳۴۸  
 سال کا آغاز، ۲۶۲  
 سال کیبیسہ، ۳۳۴  
 سال کوکبی، ۳۲۳

- شمسی، ۳۲۳  
 کاروباری، ۳۲۳  
 ستارے، ذاتی حرکتیں، ۳۰۰  
 کا تکبید، ۱۴۸  
 سرطان، سورج کا محل انقلاب گریا پر، ۳۷۴  
 ساک راج، خیالی کرہ سماوی کا مرکز، ۱۰۸  
 سماوی خط استواء، ۱۲۹  
 کرہ، ۱۰۵  
 افق، ۱۱۰  
 سمپن کا ضابطہ، انعطاف کے لیے، ۱۹۵  
 سورج کی ظاہری حرکت، ۲۳۴  
 ستارہ کا تکبید، ۱۵۰  
 شطب، ۲۹  
 شمسی سال، ۳۲۳  
 شمال قطبی فاصلہ، ایک ستارے کا، ۱۲۷  
 صعودی عقدہ، ۵۲  
 صعود مستقیم، ۱۲۵، ۳۱۴  
 ضابطہ علم مثلث کر دی کے، اساسی، ۱  
 مذ شطب، ۳۹  
 طریق الشمس، ۱۲۷  
 طلوع، کسی جرم فلکی کا، ۱۱۴، ۱۵۷  
 طول بلد، ۱۶۲  
 ظاہری حرکت سورج کی، ۳۴۸  
 دو ستاروں کا فاصلہ، ۱۰۷  
 عرض التمام، ۱۱۶

- عرض بلد، ۶۶، ۱۱۶، ۱۶۲  
 عقدہ، ۵۲  
 عکاسی، اس سے متعلق ہیئت مسئلے، ۲۲۱  
 غروب کسی جرم فلکی کا، ۱۱۴  
 غیر تابع یومی اعداد، ۲۸۹  
 فاصلہ دو ستاروں کا ظاہری، ۱۰۷  
 فالماوتھ پر مقناطیسی انصراف، ۱۲۲  
 فرس، ۱۲۸  
 فوبوس، مریخ کا قمر، ۲۳۳  
 نوکوکار فاص، ۱۱۱  
 قائم الزاویہ مثلث، ۸  
 قریب ارضی، ۲۳۶  
 قدم، ۱۱۱  
 قطب تارہ، ۱۱۳  
 کار استقبال، ۲۶۴  
 قطب، ۱۱۲  
 قطب اسد چاند سے فاصلہ، ۱۷۵  
 قطبی فاصلہ، ۱۲۶  
 قمر شمس استقبال، ۲۷۱  
 قمر مریخ کے، ۲۳۳  
 قنطورس (ذاتی حرکت، ۳۰۱)  
 قیفاؤس (عد) کا انعطاف، ۲۰۰  
 کانولی، کیلر کے مسئلے کا حل، ۲۴۰  
 کاروباری سال، ۳۲۳  
 کبوتر، ۲۷۰

- کپلر کے کٹے، ۲۲۲  
 کا مسئلہ، ۲۳۹  
 کرہ نما ارض، ۶۶  
 کرہ ہوائی، ۱۹۰  
 کرہ ہوائی کا انعطاف نما، ۱۷۸  
 کرہ ہوائی کا انعطاف، ۱۷۷  
 عام نظریہ، ۱۸۳  
 تقریقی مساوات، ۱۸۶  
 کیسینی کا ضابطہ، ۱۹۰  
 سمپسن کا ضابطہ، ۱۹۵  
 براڈے کا ضابطہ، ۱۹۷  
 مشاہدہ سے معلوم کرنا، ۱۹۹  
 ساعتی زاویے اور میل پر اثر، ۲۰۳  
 ظاہری فاصلہ پر اثر، ۲۰۵  
 دوہرے تارے پر اثر، ۲۱۰  
 کرہ مساوی، ۱۰۶  
 پر بڑے دائرے، ۱۱۲  
 کے قطب، ۱۱۳  
 پر محدودوں کے نظام، ۱۱۹  
 کروئی مثلث، ۱  
 عام ضابطے، ۱  
 ڈلمبر کی تمثیلات، ۱۲  
 نیپیر کی تمثیلات، ۱۵  
 تقریقی ضابطے، ۱۹  
 ربی مثلث، ۸

- کلارک زمین کے ابعاد ۶۶، ۷۱  
 کلے نیوٹن کے ۲۲۴  
 کوکبی وقت ۱۳۳  
 کوکبی وقت سے اوسط وقت معلوم کرنا ۳۳۸  
 کوکبی یوم ۱۳۲  
 سال ۳۲۳  
 کوٹنر، عرض بلد میں تغیرات ۳۰۲  
 کیکشاں ۱۷۴  
 کیلنڈر گری گوری کا ۳۲۴  
 جولین ۳۲۴  
 کیمبرج، اس کے ارض مرکزی عرض بلد کو محسوب کیا گیا ۷۰  
 کیسینی کوہ ہوالی کا انعطاف کا نظریہ ۱۹۰  
 کیو مقناطیسی انصراف ۱۲۱  
 گکاؤس کی متشکلات ۱۲  
 گردش زمین کی ۱۳۲  
 گری گوری کا کیلنڈر ۳۳۴  
 گلاڈسٹون اور ڈیل کا کلیہ ۱۸۸  
 گھڑی پیمائی ۳۱۱  
 لیویر کا قاعدہ، کیلر کے مسئلے کے حل کے لیے ۲۵۰  
 متوازی دائرے ۱۱۳  
 مخروط زمین کا ۶۶  
 مدت دوران ۲۲۳  
 مدار ۲۲۲  
 مرکبٹر کا قفل ۸۱  
 کے ہم شکل ہونے کا ثبوت ۸۲  
 مساوی البیضان کا ۷۷



اس سے تسلیمی فیصل اخذ کرنا، ۹۳

مرکزی مساوات، ۳۵۴

مزدکسی جرم فلکی کا، ۱۱۵

مشتری کا تکبید، ۱۵۰

موسم، ۳۷۳

منیل، ۱۲۵، ۱۲۶

میدان طریق الشمس کا، ۱۳۰

ناقصی حرکت، ۲۲۲

کیلر کے کٹے، ۲۲۲

نیوٹن کے انکشافات، ۲۲۳

کو محسوب کرنا، ۲۳۵

ناقصیت، ۷۳

نزولی عقدہ، ۵۲

نصف النہار، ۱۱۵

نقشہ ہم شکل، ۷۷

نیوٹن کے کٹے، ۲۲۳

نیوٹن حرکت کے کٹے، ۲۲۳

نیپیر کی تمثیلات، ۱۲

وقت ظاہری، ۳۳۲

دیالنسیا پر تقناطیسی انصراف، ۱۲۱

ہندسی اصول اوسط حرکت کا، ۳۲۶

ہیلی کا مدار تارا، ۲۲۲

ہیئت انعطاف، ۱۸۱

ہیئت لکڑی، ۳۱۱

یوم کوکبی، ۱۳۰

یولر کا مسئلہ، ۲۵۳

# فہرست اصطلاحات

## علم ہیئت کروی

### حصہ اول

Aberration	ضلالت
Abscissa	خصلہ
Altazimuth	آل ارتقااع والست
Almucantar	المقنطر
Analogies	تمیثلات
Andromedae	اندرومیدا
Antarctic circle	دائرہ قطب جنوبی
Antinole	ضد شطب
Antipodal	تحت قدمی
Aphelion	اوج
Apex	راس
Apogee	بعیدارضی
Apsē	اوج
Aquilæ	عقاب
Arcturus	ساک راع
Arctic circle	دائرہ قطب شمالی
Aries	حمل
Ascending node	صعودی عقدہ

Asteroids	نجیمہ
Astrograph	نجم نگار فلک نگار
Autumn	خریف
Autumnal equinox	اعتدال خریف
Capella	عیوق
Cardinal points	اساسی نقطے
Celestial	سماوی
(a) Cephei	عہ قیقاؤس
Centauri	قنطورس
Circuit	دورہ
Circumpolar	حائط قطبی
Civil year	کاروباری سال
Chrono-meter	وقت پیم
Clock star	گھڑی تارہ
Collimation	توازی گری
Collimating telescope	توازی گردوربین
Comet	دندار تارہ
Colatitude	عرض التمام
Conformal representation	ہم شکل تعبیر
Conformal correspondence	ہم شکل متناظر
Convolutions	نغیفے
Counter part	جواب
Corpuscular theory	جسمیہ نظریہ
Critical stage	فاصل منزل
Culmination	تکبّد

Culminate	مکبذ کرنا
Current coordinates	رواں محدد
Cusp	قرن
Cycle	دور
Cyclic	دائری
Cygn	دجاہ
Declination axis	میلی محور
Defective limb	ناقص کنارہ
Declination	میل
Deimos	دیموس
Depression	پستی
Differential formula	تفرقی ضابطہ
Descending node	نزولی عقدہ
Dispersion	انتشار
Duplicate ratio	نسبت ثنائہ
Diurnal	یومی
Ellipticity	ناقصیت
Elongation	ابتعاد
Epoch	قرن
Equation of time	وقت کی مساوات
Equinoctial colure	دائرہ اعتدالین
Ephemeris	الفیمیرس
Error of collimation	خطائے توازی گری
Eridani	النہر
Evening star	شام کا ستارہ

Expose	عریان کرنا
Extrapolation	ورائی ادراج
Eccentric	خارج المرکز
Eye piece	چشمہ
Exterior planet	بیرونی سیارہ
Focal circle	ماسکی دائرہ
First quarter	پہلا ربع
Field of view	میدان نظر
Gearing	گیرائی
Generalized instrument	تعمیمی آلہ
Geocentric	ارض مرکزی
Gun-metal	توب دھات
Heliometer	شمس پیم
Helio-graph	شمس نگار
Horary motions	ساعت واری حرکتیں
Hour angle	ساعتی زاویہ
Ideal	تصویری کامل
Index error	نظاری خطا
Inferior planet	سفلی سیارہ
Intergration by parts	مکمل بالخصص
Interpolation	بینی ادراج
Invert	مقلوب کرنا
Inversion	انقلاب
Inverses	مقلوبات
Invariant	غیر متغیر

Iris	ایرس
Jupiter	مشتری
Latitude	عرض بلد
Latus-rectum	وتر خاص
Libra	میزان
Leap year	سال کبیسه
Light equation	نوری مساوات
Limb of the sun	کنارہ (سورج کا)
Longitude	طول بلد
Loxodrome	مساوی المیلان
Lunation	قمریہ
Luni-solar-precession	قمر شمسی استقبال
Major circle	بڑا دائرہ
Mechanism	میکانیت
Milky way	کھکشیاں
Minor circle	صغیر دائرہ
Nadir	قدم
Nebeula	سحاب
Nole	شطب
Nutation	کبو
Object glass	دہانہ
Obliquity	میلان
Occultation	اجتباب
Opposition	تقابل
Optical	منافری

Orbit	مدار
Ordinate	معیین
Osculating curve	نشی منحنی
Pegasus	فرس
Penumbra	ظل مشوب
Perigee	قریب ارضی
Perihelion	خفیف
Periodic time	مدت دوران
Perspective projection	منظری تطلیل
Phobos	فوبوس
Photographic plate	عکسی تختی
Photography	عکاسی
Photometric	ضیاء پیمائی
Pleiades	ثریا
Polaris	قطب تارہ
Position angle	زاویہ محل
Progression	تقدم
Proper motion	ذاتی حرکت
Quadrantal-triangle	ربعی مثلث
Quadrature	ترجیع
Range	سعت
Reading-microscope	قاری خوردبین
Reappearance	انجلاء
Regression	رجعت
Regulus	قلب اسد

Residuals	تغلیات
Retrograde	رجعی
Retrogression	رجعت
Right-ascension	صعود مستقیم
Round numbers	بے کسر عدد
Satellites	تابع، قمر
Sappho	سیفو
Saros	قرن
Sidereal day	کوکبی یوم
Sidereal year	کوکبی سال
Sirius	شعری
Slides	تختی
Solar day	شمسی یوم
Solstices	انقلاب
Solstitial colure	دائرہ انقلابین
Spider lines	خطوط عنکبوت
Spring	بہار
Stand	ایستادہ
Stationary	مقیم
Stereographic projection	تسطیحی افلال
Summer	گرمی
Sundial	دھوب گھڑی
Terrestrial date line	ارضی تاریخ خط
The first point of Aries	راس الحمل
The first point of Libra	راس المیزان



Transcendental equation

علوی مساوات

Transit

مرور

Umbra

فیصل محض

Undulatory Theory

موجی نظریہ

Venus

زہرا

Vernal equinox

اعتدال ربیع

Vertex

راس

Winter

سرما

Zenith distance

راسی فاصلہ

Zone

منطقہ



## STARS AND CONSTELATIONS

Achernar

آخر النہر

Acrab

عقرب

Adara

عذرا

Alcor

الخوار

Alcyone

السیونی

Aldebaran

الدبران

Alderamin

الذراع الیمین

Algeiba

الغیا

Algenib

الجنب الفرس

Algol

الغول

Algorab

الغراب

Alioth

الیاتہ

Alkaid

القائد

Alkalurops

الکلو روپس

Alkes

الکاس

Almak

الغناق

Alnilam

الغناق

Alphard

الفرد

Alphecca

الفکہ

Alpheratz

الفرس

Alphirk	الفِرَق
Alrai	الرّاعی
Alruccabah	الرّکبہ
Alshain	الشّائین
Altair	الطّائر
Antares	انڈیرس
Arcturus	ارکیورس
Arneb	ارنب
Asterope	اسٹیروپی
Atlas	اٹلس
Azimech	ایماک
Baten Kaitos	بطن القیٹوس
Bellatrix	بیلارکس
Benetnasch	بنات النّش
Betelgeuse	ابط الجوزا
Canopus	سہیل
Capella	عمیق
Caph	کف
Castor	کیٹر
Cor Caroli	قلب چارلس
Cor Hydrae	قلب الحیّہ
Cor Leonis	قلب الاسد
Cor Scorpinnis	قلب عقرب
Cor Serpentis	قلب شجاع
Denebola	ذنب الاسد

Diphada	ضفدرع
Dubhe	دُبَّہ
Electra	الکٹرا
Enif	انف الفرس
Errai	الراعی
Etamin	النین
Fom	فوم
Fomalhaut	فوم الموت
Giedi	جدی
Gomeisa	غمیصا
Hamal	حمل
Homam	ہمام
Hyades	ہیادیس
Izar	ازار
Kaitain	خیطین
Kaus Australis	قوس جنوبی
Kelb al Rai	کلب الراعی
Kocab	کوکب
Kaus Borealis	قوس شمالی
Maia	مایا، میتہ
Markab	مرکب
Mebuta	مبسوطہ
Megrez	مغرز
Menkalinan	Menkalinan
Menkar	منکر
	$\delta$ Ursae Majoris
	$\beta$ Aurigae
	$\alpha$ Ceti

Merak	$\beta$ Andromedae	مراق
Merope		میروپی
Mesarthim	$\gamma$ Arietis	میشارثیم (زیرانی)
Mintaka	$\delta$ Orionis	منطقه
Mira	$\theta$ Ceti	میرا
Mirac, see Merak	Andromedae	مراق
Mirfak	$\alpha$ Persei	مرفق
Mirzam	$\beta$ Canis Majoris	مرزم
Mizar	$\zeta$ Ursae Majoris	مشیز
Muphrid	$\eta$ Bootis	مفرد
Nath	$\beta$ Tauri	
Nekkar	$\alpha$ Bootis	نقار
Okda	$\alpha$ Piscium	عقدہ
Phakt	$\alpha$ Columbae	فاختہ
Phecda	$\gamma$ Ursae Majoris	فخذ
Pleiades		ثریا - پرویں
Pleione	28 Tauri	پلیونی
Polaris		قطب تارا
Pollux		پالکس (موقر التواس)
Praesepe		پریسپی
Prima Giedi	$\alpha$ Capricorni	راس الجدی
Procyon		شعر الشامیہ
Ras Algethi	$\alpha$ Herculis	راس الجاثی
Ras Alhague	$\alpha$ Ophiuchi	راس النجاوی
Rastaba	$\beta$ Draconis	راس التبان

Regulus	$\alpha$ Leonis	قلب الاسد
Rigel	$\beta$ Orionis	رجل
Rotanev	$\beta$ Delphini	روٹانیو
Sadachbia	$\gamma$ Aquarii	سعد الاقبیہ
Sadalmelik	$\beta$ Aquarii	سعد الملک
Sadalsud	Aquarii	سعد السعود
Scheat	$\beta$ Pegasi	شیتہ
Schedar	$\alpha$ Cassiopeiae	سدر
Sheliak	$\beta$ Lyrae	شلیاق
Sheratan	$\beta$ Arietes	شرطان
Sirius		شعرى
Sirrah	$\alpha$ Andromedae	سره
Skat	$\delta$ Aquarii	
Spica	$\alpha$ Virginis	سنبلا
Sulaphat	$\gamma$ Lyrae	سلحفاة
Sualocin	$\alpha$ Delphini	سوالوسن
Talitha	$i$ Ursae Majoris	
Tarazed	$\gamma$ Aquilae	طائر الصيد
Taygeta	$\epsilon$ Tauri	ٹیجیٹا
Thuban	$\alpha$ Draconis	تبان
Unukalhay	$\alpha$ Serpentis	عنق الحیة
Vega	$\alpha$ Lyrae	نسرواق
Vindemiatrix or Almuridin	$\epsilon$ Virginis	
Wasat	$\delta$ Geminorum	وسط
Yed	$\delta$ Ophiuchi	ید

Zaurak	$\gamma$ Eridani	زورق
Zawijah	$\beta$ Virginis	زاویہ
Zozca Zozmn	$\delta$ Leonis	
Zuben el Genubi	$\alpha$ Librae	الزبان الجنوبی
Zuben el Hakarbi		الزبان العقربی
Zuben el Chamali	$\beta$ Librae	الزبان الشمالي

Andromeda	مراتہ الملسلہ
Antlia	ہوا پیمپ
Apus	طائر فردوس
Aquila	عقاب
Argo	الذینہ
Auriga	مسک الاعنہ
Camelopardus	شراف
Cassiopeia	ذات الکرسی
Cetus	قیطس
Chamaeleon	حربا
Circinus	پرکار
Columba	حمامہ
Coma Berenices	شعر بنیسی
Corona Australis	اکلیل جنوبی
Corona Borealis	اکلیل شمالی
Corvus	غراب
Crater	قم البرکان
Crux	صلیب
Delphinus	دلفین
Dorado	تینگ ماہی
Draco	تنین
Equuleus	فرس اصغر
Grus	حمالہ
Indus	اندس
Mensa	مینرہ



Microscopium	خور دینه
Oetans	ممنه
Puppis	مکشان، دپوس
Pypxsi	کمپاس
Sextans	مسد
Telescopium	دور بین
Toucanus	توکانه
Triangulum	مثلثه
Triangulum Australe	مثلثه جنوبی
Vela	شرع، یادبان
Eros	ایروس
a centauri	ع قنطورس
Lalande	لالاند
Cygni	دجابه
Cordeba	قرصه
Enceladus	انقلادوس
Equinus (the little horse)	قرص اصغر
Eridanus (the peacer)	النهر
Errai	الرائی
V cephei	جه قیفاوس
Etamin of draconis	اتنین
Flora	فلورا
Foranx (the furnace)	فرنیس
Gemini (the twins)	تو امین
Giedi	جدی

Hebe	ہیب
Hercules	ہرقلس
Homam	ہام
Horlogium (the clock)	ہارڈلوگیم
Hyads	ہیاریس
Hydra (the sea serpent)	
Hydrus	
Iklil	اکلیل
Scorpii	العقرب
Iapetus	آپیتس
Juno	جونو
Kaffaljidhma	کف الجذما
Ceti	قیطوس
Urse mindres	دب اصغر
Lacerta (the lizard)	لالرٹا
Leo (the lion)	اسد
Leo minor	اسد اصغر
Leonids	اسدی
Lepus (the hare)	ارنب
Lupus (the wolf)	سبع (بھیریا)
Lynse	فہد (سیاہ گوش)
Lyra (the lyre)	لیلیاق
Maia	میا
Malus	مالوس
Mirfuk	مرفق

Pegasi	ہیرقلس
Herculis	جوزا
Geminorum	قیطس
Ceti	میروپ
Merope (23 Tauri)	میماس
Mimas	جبا
Orionis	پرسیاوش
Persei, perseus	کلب اکبر
Canis magoria	گینڈا
Monoceros	مکھی
Musca (the fly)	قرن الثور
Bull's Horn	الخل
Leporis	نارمہ
Norma	اوبی ران
Oberon	عوا
Bootis	پالس
Pullas	طاؤس
Pavo	پردارگھوڑا
Pegasus	فوبوس
Phobos	فینکس
Phoenix	الفرد
Phurud	مصور
Pictor	حوت
Pisces	حوت جنوبی
Pisces Australis	

Pleiades	شریا
Pollux	راس التوام
Virgini	العذراء
Praesepe	خان النور
Procyon (canis minoris)	(کلب اصغر)
Rasalas	راس الاسد
Ras Algethi	راس الجاشی
Ras Alhague	راس الحاموی
Regulus	قلب اسد
Reticulum	شبکہ
Regel	رجل الحوما
Quarii	دلو
Sadal suud	سعد السعود
Sagitta	سهم
Sagittarius	قوس تیر انداز
Sculptor	بت گر
Serpens	اعیہ
Spica	العذراء
Titan	طیطان
Vasta	وسطار
Volans	سبکہ فیارہ
Vulpecula	ثعلب





آخری درج شدہ تاریخ پر یہ کتاب مستعار  
لی گئی تھی مقررہ مدت سے زیادہ رکھنے کی  
صورت میں ایک آٹھ سو مپہ دیرانہ لیا جائیگا











